Nouveaux cahiers de la recherche en éducation

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

Alain Bronner et Hassane Squalli

Volume 22, numéro 1, 2020

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1070022ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1070022ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1911-8805 (numérique)

NCRÉ
Nouveaux cahiers de la recherche en éducation
Vol. 22, nº 1, 2020

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

Alain Bronner
Université de Montpellier
Hassane Squalli
Université de Sherbrooke

Introduction

Dans le volume 2 de ce numéro spécial, les articles apportent de nouveaux éclairages sur les difficultés, stratégies et opportunités pour développer la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral. Nous rappelons que trois composantes de la pensée algébrique sont particulièrement concernées dans ce développement: la tendance à dénoter les quantités, la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique (Lins, 1992; Bednarz, Kieran et Lee, 1996; Squalli, 2000; Radford, 2014). Si certains articles se situent clairement dans le courant de recherche et d'enseignement *Early Algebra* (Carraher et Schliemann, 2007; Radford, 2018), d'autres s'ouvrent à une perspective plus large d'apprentissages de concepts mathématiques en lien avec l'arithmétique et l'algèbre. Comme pour le volume 1 de ce dossier thématique, les contributions s'inscrivent dans la recherche en didactique des mathématiques et se structurent de manière complémentaire et interactive autour des quatre axes définis dans le réseau de l'OIPA que nous avons présentés dans le volume 1:

Axe 1: Fondements épistémologiques et didactiques de la pensée algébrique;

Axe 2: Analyse et comparaison de curriculums officiels ou réels;

Axe 3: Apprentissage des élèves;

Axe 4: Enseignement et formation des enseignants.

Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire

Dans cet article, Boily et ses collaboratrices présentent des analyses d'entretiens menés dans le cadre d'une recherche collaborative (Desgagné, 1997) sur les suites non numériques (répétitives et croissantes) auprès de 18 élèves de quatre à six ans fréquentant le jardin ou la maternelle dans deux écoles de l'Ontario. Cette étude se place dans les perspectives dégagées par des chercheurs (Radford, 2012; Carraher et Schliemann, 2007; Kieran, 1992) sur la nécessité de l'introduction précoce de tâches stimulant une pensée algébrique pour prévenir les difficultés d'apprentissage de l'algèbre au niveau secondaire. Par ailleurs, ces chercheurs avancent que plusieurs éléments de la pensée algébrique sont sollicités lorsque l'élève est amené à réaliser des tâches sur les suites.

Dans ce cadre, le ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008) préconise l'étude des suites non numériques pour les élèves dès la maternelle (quatre ans) de manière à favoriser l'observation et l'analyse des régularités. Les recherches dans ce domaine sont peu nombreuses et ont amené les auteures à examiner le potentiel de l'élève de quatre à six ans pour réaliser des suites des figures géométriques à motifs répétitifs et croissantes en regard du développement de sa pensée algébrique.

La tâche consistait à présenter aux élèves trois modèles de suite. Dans un premier temps, les trois modèles de suites ont été présentés successivement à chaque élève individuellement en le questionnant sur ce qui doit «venir après». Dans un deuxième temps, on demandait aux élèves de construire leur propre suite. Dans un troisième temps, une intervenante questionnait l'élève pour l'inciter à réaliser la tâche suggérée dans le but de mieux appréhender le potentiel de l'élève. Cette méthodologie visait précisément l'identification des éléments (habiletés cognitives, démarches, erreurs des élèves) qui peuvent favoriser ou faire obstacle au développement de la pensée algébrique.

Les auteures ont étudié les composantes d'une pensée algébrique en identifiant quatre niveaux de performance associée à la tâche à résoudre chez les élèves ainsi que les erreurs et les connaissances numériques interférant dans le processus d'analyse de telles suites. Cette étude leur a permis de caractériser le potentiel d'élèves du préscolaire dans la réalisation d'une tâche portant sur les suites non numériques et d'identifier des éléments pouvant contribuer ou entraver le développement d'une pensée algébrique.

Cet article complète ainsi les niveaux d'étude du développement de la pensée algébrique pour les élèves de quatre à six ans par rapport au volume 1 de ce dossier thématique et propose plusieurs pistes de travail pour l'enseignant.

Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable

Dans cet article, Hassane Squalli et ses collaborateurs proposent un cadre d'analyse des raisonnements d'élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable pouvant être utilisés au primaire et au début du secondaire. Cet article prolonge en quelque sorte l'article «Apprentissage de l'algèbre: procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes» d'Oliveira, Rhéaume et Geerts du volume 1 de ce dossier thématique, qui s'intéressait à la nature des procédures et des difficultés manifestées par des élèves avant et après leur introduction à l'algèbre (élèves âgés entre 11 et 14 ans) dans la résolution de problèmes de partage inéquitable. Les auteurs mettaient déjà en évidence, pour ces types de problèmes, une variété de procédures utilisées par les élèves, notamment en lien avec leur «degré d'algébricité».

Dans ce volume 2, les auteurs définissent un cadre d'analyse reposant essentiellement sur la considération de deux dimensions: le degré d'analycité du raisonnement et la nature du registre de représentation sémiotique des procédures (Duval, 1995). Les fondements épistémologiques de ce cadre d'analyse s'appuient tout d'abord sur une analyse du développement historique de l'algèbre. Par ailleurs, les chercheurs soulignent le caractère analytique de la pensée algébrique: dans le contexte de la résolution de problèmes, raisonner analytiquement consiste à opérer sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu, procédant ainsi de l'inconnu vers le connu (Lins, 1992, 1993; Gascón, 1994; Bednarz, Kieran et Lee, 1996; Radford, 2010, 2108; Squalli, 2000). Le postulat pris dans cet article est qu'entre la catégorie des raisonnements non analytiques (degré d'analyticité nul) et celle des raisonnements analytiques (degré d'analyticité optimal) existe une autre catégorie de raisonnements riches sur le plan de la pensée mathématique, mais qui ne peuvent être catalogués comme analytique ou non analytique (degré d'analyticité non nul mais non optimal). Chacune de ces grandes catégories regroupe différents raisonnements se différenciant selon le degré d'analycité mais aussi selon le registre de représentation au sens de Duval (1995). Comme Hitt (2004) ainsi que Hitt et Passaro (2007), en plus de considérer les représentations sémiotiques institutionnalisées en mathématiques (algébriques, numériques, graphiques…), les auteurs prennent en compte différents registres intermédiaires (langagier, schémas, diagrammes…).

Pour opérationnaliser ce cadre d'analyse, les auteurs ont analysé les réponses de 605 élèves de 48 classes du premier cycle du secondaire (âgés entre 12 et 14 ans) ayant participé à une enquête par questionnaire (Adihou, dans ce numéro). Ce travail a permis d'identifier des exemples prototypiques issus de productions d'élèves et d'illustrer les différentes catégories et sous-catégories de raisonnement pour résoudre des problèmes de partage inéquitable. Par ailleurs, l'application de ce cadre d'analyse illustre bien que l'enjeu du passage d'une démarche de résolution arithmétique de résolution de problèmes à une démarche de résolution algébrique ne réside pas dans le recours à la lettre et au registre algébrique, mais dans le caractère analytique du raisonnement mobilisé.

Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire: qu'en est-il lors de la résolution de problème visant le développement de la pensée algébrique?

Adolphe Adihou présente dans cet article les résultats d'une recherche visant à documenter la nature analytique des raisonnements mobilisés par les élèves de 12 à 14 ans du premier cycle du secondaire (première et deuxième secondaire) au Québec dans la résolution de problèmes de comparaison en vue du développement de la pensée algébrique. Cet article s'inscrit dans le prolongement de l'article précédent et se fonde ainsi sur le cadre d'analyse des raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable (Squalli, Larguier, Bronner et Adihou, dans ce volume). Rappelons que cette grille propose de catégoriser les raisonnements selon deux dimensions, le caractère d'analycité et la nature du registre sémiotique de résolution, et se structure en trois grandes catégories de raisonnements: *synthétiques*, *à tendance analytique* et *analytiques*, ainsi que trois grandes catégories de registres de représentation: *purement numérique*, *intermédiaire* et *algébrique*. L'article propose plus spécifiquement une comparaison des procédures de résolution des élèves dans les problèmes de partage inéquitable entre la première et la deuxième secondaire en se centrant sur la dimension relative au caractère d'analycité. L'auteur étudie plus précisément les raisonnements de nature analytique et les stratégies algébriques utilisés par les élèves du premier cycle du secondaire avant et après l'introduction à l'algèbre en prenant en compte deux questions spécifiques: *Quels sont les types de raisonnements de nature analytique produits par les élèves de première secondaire sans être initiés au symbolisme? Et, après l'introduction au symbolisme, les élèves réussissent-ils à utiliser des raisonnements analytiques?*

Le corpus utilisé comprend un questionnaire composé de 12 problèmes de comparaison déconnectés élaborés d'après la grille de Bednarz et Dufour-Janvier (1994). Le questionnaire a été soumis à des élèves du premier cycle du secondaire (première et deuxième secondaire) en mai-juin 2012 auprès d'écoles provenant de 7 commissions scolaires de différentes régions du Québec et 48 classes de premier cycle de 8 écoles secondaires. Les élèves de première secondaire n'ont pas reçu un enseignement sur la résolution de problème par l'algèbre, tandis que ceux du deuxième secondaire en ont reçu un. L'analyse porte sur 605 copies pour un échantillon de 1 993 résolutions: 863 (43,30 %) résolutions proviennent des élèves de première secondaire et 1 130 (56,70 %) de deuxième secondaire.

Si comme on pouvait s'y attendre les résultats montrent la prépondérance des raisonnements *synthétiques* chez les élèves de première secondaire contrairement au cas des élèves de deuxième secondaire et une importance des raisonnements analytiques chez une majorité d'élèves de deuxième secondaire, l'opérationnalisation de la grille d'analyse présentée dans Squalli *et al.* (dans ce numéro) fournit d'autres informations intéressantes. À titre d'exemple, la recherche montre que la manifestation des raisonnements de type sophistiqué comme le raisonnement de type *fausse-position* reste fragile. Ce type de raisonnement apparaît en première secondaire chez une petite proportion des élèves, mais disparaît complètement en deuxième secondaire. Ainsi, quand on confronte les élèves à des problèmes (déconnectés) avant l'introduction de l'algèbre, ils peuvent produire ces raisonnements *à tendance analytique* comme 15,99 % des élèves de première secondaire en ont produits. Cependant, ces élèves les délaissent dès l'introduction de l'algèbre formelle.

Enfin, la recherche confirme les résultats de Bednarz et Dufour-Janvier (1994) sur le fait que l'introduction à la méthode algébrique conventionnelle de résolution peut faire obstacle à la manifestation d'autres types de raisonnements. Elle montre aussi la pertinence d'une perspective curriculaire du type *Early Algebra* et elle milite pour l'importance de plonger l'élève dans les activités mathématiques riches, de les confronter avec des problèmes déconnectés plus tôt, c'est-à-dire dès le primaire très tôt avant l'introduction de l'algèbre formelle, pour favoriser le développement de la pensée algébrique.

Kaléidoscope sur l'accroissement des problèmes de mise en égalité dans les manuels scolaires québécois

Mélanie Tremblay et Mireille Saboya proposent dans leur article d'étudier l'augmentation de problèmes dont la modélisation peut se traduire par une équation où l'on retrouve l'inconnue dans les deux membres de l'égalité dans les manuels de mathématiques québécois du premier cycle du secondaire et d'en rechercher les raisons justifiant cette augmentation. Après avoir précisé le contexte de leur étude, elles s'intéressent tout d'abord aux programmes des deux dernières réformes (1992 et 2003) et remarquent qu'au premier cycle du secondaire (13-14 ans), les visées en algèbre ne diffèrent pas du précédent programme, et poussent à ce que les élèves s'engagent dans un processus de modélisation où il y aurait traduction de l'énoncé d'un problème à l'aide d'une équation algébrique dont la résolution, au moyen de manipulations symboliques, conduirait à la recherche de la solution (Gouvernement du Québec, 2006).

Pour cette étude les auteures s'appuient sur les résultats d'une étude comparative de ces problèmes qu'elles nomment «mise en égalité» et qui ont été recensés dans des manuels issus des réformes de 1992 et 2003. L'analyse se réalise à travers la démarche mise en place dans les travaux de Marchand et Bednarz (1999) en prenant en compte les classes de problèmes, les cadres en jeu ainsi que la représentation et le degré d'explicitation de la mise en égalité. Cette étude s'inscrit dans une démarche qualitative/interprétative (Savoie-Zajc, 2004) pour mieux comprendre les critères qui guident le choix des problèmes proposés dans les manuels scolaires du premier cycle du secondaire en mathématiques.

Pour la réforme précédente, Mélanie Tremblay et Mireille Saboya utilisent les résultats tirés de l'étude des manuels de l'étude de Marchand et Bednarz (1999), notamment sur la résolution de problèmes visant l'introduction au raisonnement analytique. En particulier, de l'analyse des manuels de cette réforme (1992), elles retiennent plusieurs constats dont le fait que les problèmes de type partage inéquitable s'y retrouvent de façon majoritaire (Marchand et Bednarz, 1999). Ce qui montre encore leur importance dans les choix didactiques pour le développement de la pensée algébrique, même si l'article met au jour un changement, et le lien avec les deux articles précédents du volume 2 de ce dossier thématique sur l'axe 2 centré sur le curriculum et les manuels.

Les manuels scolaires récents de la deuxième année du premier cycle (élèves de 13 ou 14 ans), et plus particulièrement les chapitres relatifs à la résolution de problèmes, constituent le corpus de données de cette recherche. Une comparaison entre l'analyse des manuels de la réforme des années 2003 et celle de la réforme de 1992 (menée par Marchand et Bednarz, 1999) met en évidence une rupture dans le type de problèmes proposés par les concepteurs des manuels scolaires de ces deux périodes et amène les auteures à distinguer des éléments de complexité dans les manuels des années 2000 qui interrogent l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Comparativement aux manuels de la précédente décennie, les auteures constatent qu'une place importante est dorénavant faite aux problèmes de mise en égalité pour chacune des collections étudiées. Alors que les problèmes de partage inéquitable sont majoritaires dans les manuels de la réforme de 1992, un mélange des types de problèmes se retrouve souvent dans un même énoncé pour les manuels d'après la réforme de 2003. Ces résultats permettent finalement de discuter de la transformation de l'activité de résolution de problèmes et de la nécessité, pour les enseignants, de considérer les choix faits dans nos plus récents manuels pour favoriser le recours au raisonnement analytique ainsi qu'au langage littéral dans la résolution des problèmes proposés. Pour les auteures, ces choix didactiques semblent motivés par le désir de favoriser l'expression d'un raisonnement analytique chez l'élève qui sera dominé par le recours à la modélisation à l'aide d'équations.

Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire

L'article de Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch et Josep Gascón s'inscrit dans la théorie anthropologique du didactique (TAD) et propose comme outil d'analyse l'élaboration d'un modèle épistémologique de référence (MER). Les auteurs commencent par expliciter la nécessité d'un tel outil dans le processus de recherche en didactique (Bosch et Gascón, 2005) et présentent la première phase d'une méthode de recherche utilisée en TAD appliquée au problème didactique de l'algèbre élémentaire dans l'enseignement secondaire obligatoire en Espagne. Ce questionnement est issu de l'analyse des processus transpositifs (Chevallard, 1985) qui ont conditionné l'état actuel de l'algèbre scolaire, et conduit les auteurs à se demander quel est le modèle épistémologique dominant dans cette institution (Bolea, Bosch et Gascón, 2001 ; Ruiz-Munzón, 2010). Pour répondre à cette question, Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch et Josep Gascón ont été conduits à créer un modèle de l'algèbre construit depuis la recherche, un modèle épistémologique de référence (MER), qui se veut un instrument d'analyse élaboré pour expliquer des limitations de l'algèbre enseignée et mettre en évidence les phénomènes qui en découlent. L'algèbre élémentaire dans ce MER y est interprétée comme un processus d'algébrisation de praxéologies mathématiques (Chevallard, 1999) déjà disponibles ou de praxéologies non mathématiques facilement mathématisables en termes d'opérations sur des grandeurs numériques ou géométriques (Bolea, Bosch et Gascón, 2001). Les auteurs présentent ainsi un MER du développement de l'algèbre scolaire qui s'inscrit dans un modèle plus large permettant d'articuler l'arithmétique, l'algèbre, les nombres relatifs, la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel. Cela les conduit à une construction explicite d'un MER alternatif à l'arithmétique généralisée, modèle dominant de l'algèbre élémentaire, en cohérence avec quatre indicateurs du degré d'algébrisation d'une praxéologie mathématique.

Ce modèle prend comme point de départ les «programmes de calcul» (PC) et considère l'algèbre comme un processus de modélisation structuré en trois étapes. La praxéologie «arithmétique» où s'inscrit ce type de travail avec les PC atteint des limites à la fois techniques et théoriques pour résoudre certains problèmes, par exemple, pour pouvoir déterminer si deux PC sont ou non équivalents ou les comparer. Cette nouvelle pratique engendre le besoin de nouvelles techniques pour créer et simplifier des PC. Le passage à la seconde étape d'algébrisation apparaît alors lorsque les techniques de simplification et les équivalences entre PC ne suffisent pas pour résoudre des problèmes, par exemple lorsque les données à modéliser et les inconnues du problème apparaissent comme des relations entre quantités. Pour Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch et Josep Gascón, dans de nombreux pays l'algèbre scolaire se situe presque entièrement dans une sous-partie de cette seconde étape du processus d'algébrisation, avec un passage très rapide et partiel par la première étape, uniquement pour introduire les expressions algébriques et les techniques de simplification et développement. La *troisième étape* du processus d'algébrisation est, pour les auteurs, nécessaire lorsque disparaît la distinction entre inconnues et paramètres pour donner lieu à une praxéologie centrée sur la production, transformation et interprétation de formules. Elle joue un rôle essentiel dans la transition vers la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel, transition qui se produit sous une forme très abrupte dans l'enseignement secondaire, tout spécialement lors du passage du collège au lycée.

Enfin, les auteurs illustrent la potentialité du MER construit pour la création et l'analyse de séquences didactiques dans la première étape du processus d'algébrisation en décrivant une ingénierie didactique centrée sur l'utilisation de l'outil algébrique en partant du travail d'exécution de PC dans le cas d'un type de problèmes arithmétiques simple – les jeux de mathémagie – afin de mener les élèves dans les différentes étapes du processus d'algébrisation. Cette première étape fait surgir des limitations qui motivent le passage de la première à la deuxième étape du processus d'algébrisation, puis à la troisième étape d'algébrisation qui suppose un changement radical du travail mathématique des élèves et une porte d'entrée vers la modèlisation algébrico-fonctionnelle (Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch et Gascón, 2012).

Cet article donne aussi un autre outil pour analyser les problèmes de «mise en égalité» qui ont fait l'objet d'étude comparative de manuels dans l'article précédent de ce volume 2 et pour prolonger ce type d'étude sur l'évolution du curriculum dans différents pays.

Nous partageons le point de vue de Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch et Josep Gascón sur l'importance d'expliciter un modèle épistémologique de référence pour l'algèbre élémentaire, et plus généralement sur la pensée algébrique, comme un outil descriptif pour analyser les types de problèmes, les praxéologies arithmétiques et algébriques qui sont enseignées et étudier leur écologie, et pour créer, expérimenter de nouvelles propositions d'enseignement pour mieux connaître les possibilités de modification de l'écologie des systèmes scolaires actuels.

Comme on l'a indiqué au fur et à mesure des présentations, les articles de ce deuxième volume complètent ainsi les regards sur les différents axes (volume 1) du numéro thématique sur la pensée algébrique.

Références

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In J. da Ponte et J. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. II (p. 64-71). Lisbon: University of Lisbon.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Bolea, P., Bosch, M. et Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques* (p. 107-122). Grenoble: La pensée sauvage.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, vol. 2, (p. 707-762). Greenwich: Information Age.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative: l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, *23*(2), 371-393.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang SA.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, *37*, 43-63.

Gouvernement du Québec (2006). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle, 6 (p. 223-264). Québec: Gouvernement du Québec.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329-354.

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes: le rôle des représentations spontanées. Dans *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet 2007.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York: Macmillan.

Lins, R. C. (1992). *A Framework for Understanding what Algebraic Thinking Is*. Thèse de doctorat. Nottingham: University of Nottingham.

Lins, R. C. (1993). *Understanding what Algebraic Thinking Is: Analysis and Synthesis. A Contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic Processes and the Role of Symbolism*. London: University of London.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *XXXIX*(4), 30-42.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008). Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année. Modélisation et algèbre. Toronto, ON: Queen's Printer for Ontario.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental Issues. Regular lecture presented at the 12th International congress on mathematical education, held in Seoul, Korea, 8 July-15 July, 2012. Repéré à: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3_15.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 3-25). Cham: Springer International Publishing AG 2018.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización functional*. Thèse de doctorat. Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* (numéro spécial), 81-101.

Savoie-Zajc, L. (2004). La recherche qualitative/interprétative. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 191-218). Montréal, QC: Presses de l'Université de Montréal.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat. Université Laval, Québec, Canada.