L'Actualité économique

Demande d'assurance, décisions de consommation et de portefeuille : une analyse en temps continu
Insurance Demand, Consumption and Portfolio Decisions: A Continuous-Time Analysis

Eric Briys

Volume 63, numéro 2-3, juin–septembre 1987

Incertain et information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601418ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601418ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Briys, E. (1987). Demande d'assurance, décisions de consommation et de portefeuille : une analyse en temps continu. *L'Actualité économique*, *63*(2-3), 200–212. https://doi.org/10.7202/601418ar

Résumé de l'article

Cet article examine la demande optimale d'assurance dommage en temps continu. Les décisions d'assurance, de portefeuille et de consommation sont analysées conjointement dans un cadre à la Merton (1969, 1971). Des solutions explicites sont dérivées dans le cas d'une fonction d'utilité isoélastique. Il apparaît que les propriétés de la demande optimale d'assurance sont bien plus complexes que ne le laissent supposer certaines récentes contributions.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

DEMANDE D'ASSURANCE, DÉCISIONS DE CONSOMMATION ET DE PORTEFEUILLE : UNE ANALYSE EN TEMPS CONTINU

Eric BRIYS*
Centre HEC-ISA France

Cet article examine la demande optimale d'assurance dommage en temps continu. Les décisions d'assurance, de portefeuille et de consommation sont analysées conjointement dans un cadre à la Merton (1969, 1971). Des solutions explicites sont dérivées dans le cas d'une fonction d'utilité isoélastique. Il apparaît que les propriétés de la demande optimale d'assurance sont bien plus complexes que ne le laissent supposer certaines récentes contributions.

Insurance Demand, Consumption and Portfolio Decisions : A Continuous-time Analysis. — This paper provides a continuous-time analysis of the optimal insurance demand by individuals. A joint treatment of the insurance, consumption and portfolio decisions is presented using a framework à la Merton (1969, 1971). The individual optimal insurance demand is explicity derived under the class of isoelastic marginal utility functions. It is shown that the properties of the optimal insurance coverage are far more complex than suspected by some recent contributions. In the course of doing so this paper tries to fill a gap of the traditional insurance literature which has very often focused on insurance in isolation.

I. INTRODUCTION

L'analyse de la demande optimale d'assurance a toujours suscité un intérêt académique marqué. Les travaux séminaux de Arrow (1963), Smith (1968) et Mossin (1968) ont contribué à forger les résultats angulaires de la théorie de la demande optimale d'assurance. Il est désormais bien connu qu'un individu averse

---

* Professeur Assistant, Département Finance.

L'auteur remercie H. Louberge, Université de Genève, H. Schlesinger, University of Alabama, R. Schöbel, Hochschule Lüneburg et D. Talay, INRIA pour leurs précieux commentaires. Une version antérieure de cet article a fait l'objet d'une présentation au Risk Theory Seminar à l'Université du Texas à Austin (1987). Toute erreur ou omission est bien entendu la pleine et entière responsabilité de l'auteur.

au risque au sens de Bernoulli — Von Neuman — Morgenstern n'achètera jamais pleine couverture d'assurance si la prime comporte un coefficient de chargement proportionnel strictement positif.

Depuis lors, certains auteurs ont proposé des résultats qui contrastent assez fortement avec la règle délivrée par Arrow — Smith — Mossin. Razin (1976) a par exemple montré que pour un individu se comportant selon le minimax-regret de Savage, une franchise d'assurance est toujours optimale même en l'absence d'un facteur de chargement. Briys et Loubergé (1985) ont par ailleurs souligné que la pleine assurance était très souvent optimale pour un individu se conformant au principe d'Hurwicz.

Ces résultats peuvent apparaître très contradictoires. Il n'en reste pas moins qu'un point commun les unit. Dans toutes les contributions mentionnées ci-dessus, la décision d'assurance est examinée isolément. Aucune référence n'est faite à la complexité de l'environnement du décideur. En d'autres termes, les études antérieures agissent comme si la décision d'assurance était parfaitement séparable des autres décisions de l'individu. Elles réduisent l'univers à un cadre monorisque où le seul instrument de couverture disponible est le contrat d'assurance.

Un tel domaine d'investigation est évidemment restrictif. Comme l'ont montré Doherty et Schlesinger (1983), le résultat de Arrow — Mossin — Smith ne tient que si les sinistres assurables et non assurables sont non positivement corrélés. Dans le cas d'une corrélation positive, une couverture d'assurance supérieure à 100% est optimale. Schulenburg (1986) présente des résultats similaires en observant que les régimes obligatoires d'assurance ont des impacts non négligeables sur les marchés d'assurance non réglementés. On doit également à Mayers et Smith (1983) l'idée selon laquelle le contrat d'assurance trouve une légitimité renforcée par l'existence d'imperfections de marché (*i.e.* coûts de transaction) ou de situations particulières (capital humain non négociable par exemple). Ce thème est d'ailleurs repris par Doherty (1984).

Paradoxalement, aucun article de ce nouveau courant de littérature ne traite simultanément des trois dimensions de la décision d'un individu dans un cadre multipériodique : consommation, portefeuille et assurance. Certes, il existe des contributions de ce type en matière d'assurance-vie (*cf.* Richard (1975)) dont l'objet principal est l'examen de l'impact de l'incertitude de l'horizon de vie d'un individu sur ses décisions optimales. En revanche, aucune recherche à ce jour ne s'est penchée sur le cas de l'assurance-dommages. Dès 1969 pourtant Gould concluait un article en soulignant qu'on ne pouvait traiter efficacement la demande d'assurance-dommage qu'à partir du moment où le cadre d'investigation englobait également les autres décisions de l'assuré. Dionne et Eeckhoudt (1984) ont d'ailleurs suggéré une extension identique à leurs propres travaux.

L'objet de la présente recherche est justement de développer une telle approche et plus spécifiquement d'analyser les décisions optimales de consommation, portefeuille et assurance-dommages en temps continu. Plusieurs références seront faites à l'assurance-habitation qui permettront une meilleurs compréhension des résultats.

L'article est organisé de la manière suivante. Le modèle et ses principales hypothèses sont présentés dans la section II. L'individu maximise l'espérance d'utilité de sa consommation sur son horizon de vie et les transactions sur actifs ont lieu continument. Dans la section III, les règles optimales de consommation, portefeuille et assurance sont dérivées et analysées. La séparabilité de la demande d'assurance-dommages est examinée. Les sections IV et V présentent des solutions analytiques sous l'hypothèse de préférences isoélastiques. Dans la section VI, une illustration numérique du comportement de la couverture optimale d'assurance est fournie. La conclusion résume les principaux résultats et suggère des voies de recherche complémentaires.

II. LE MODÈLE ET SES HYPOTHÈSES

Nos hypothèses sont proches de celles de la littérature financière. Pour simplifier l'analyse néanmoins, l'espace des opportunités de l'individu est restreint à trois actifs principaux.

Le premier actif est un actif risqué, sinistrable, assurable et négociable. La valeur à l'instant t est dénotée $S_1(t)$ et est générée par un processus mixte diffusion — saut :

$$dS_1(t) = \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dz_1(t) - S_1(t)dq(t) \tag{1}$$

équation différentielle stochastique dans laquelle μ_1 et σ_1^2 dénotent respectivement le rendement instantané et la variance instantanée du rendement de l'actif en l'absence de saut. $Z_1(t)$ est un processus de Wiener standard. Puisqu'un sinistre peut facilement être interprêté comme un saut négatif dans la richesse de l'individu, un processus de Poisson $q(t)$ à paramètre λ est introduit dans l'équation (1). Par souci de simplicité, nous supposons que ce processus est un processus à deux états : pas de sinistre ou sinistre total. En d'autres termes, l'amplitude du saut prend la valeur un avec la probabilité un.

Le deuxième actif est également risqué et sinistrable. En revanche, nous le supposons partiellement assurable voire inassurable. Nous reviendrons dans ce qui suit sur cette contrainte d'assurance partielle. La valeur de ce second actif est notée $S_2(t)$ et est générée par un processus mixte diffusion-saut similaire au précédent :

$$dS_2(t) = \mu_2 S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dz_2(t) - S_2(t)dq(t) \tag{2}$$

équation dans laquelle le processus de Poisson est rigoureusement identique à celui de l'équation (1). Cette simplification peut sembler abusive. Elle présente toutefois deux avantages non négligeables. Outre le mérite d'alléger les calculs, elle rend compte de certaines situations réelles assez fréquentes. Il existe en effet de nombreux cas dans lesquels une seule et unique source de sinistre entraîne la perte ou la disparition simultanée de plusieurs actifs : incendie, tempête, vol, etc.

Nous supposerons de plus que covariance $(dz_1, dz_2) = \rho\, dt$. Les processus de Wiener et Poisson sont supposés indépendants.

Le troisième actif est un actif sans risque tel que :

$$d\, S_3(t) = r\, S_3(t)\, dt \tag{3}$$

avec r rendement sans risque.

Dans cette économie à trois actifs, une couverture d'assurance est disponible qui donne à l'individu la possibilité d'atténuer l'impact des sauts sur sa richesse[1]. Cette couverture implique le versement d'une prime d'assurance établie de la façon suivante :

$$P(\beta_1(t), \beta_2) = (1 + \theta)\, \lambda\, (\beta_1(t)\, \alpha_1(t) + \beta_2\, \alpha_2(t))\, W(t) \tag{4}$$

avec

β_1 : taux de coassurance sur le premier actif par unité de temps

β_2 : taux de coassurance imposé sur le second actif

θ : facteur de chargement $\theta \geqslant o$

α_1 : pourcentage de la richesse investi dans le premier actif

α_2 : pourcentage de la richesse investi dans le second actif

W : richesse

Dans cette formulation de la prime d'assurance, nous faisons l'hypothèse que la décision du taux de couverture se limite au premier actif. La couverture du second actif est imposée contractuellement par la compagnie d'assurance. Ce genre de pratique est par exemple très courant en assurance multirisque habitation. En effet, la couverture des objets de valeur (« bijoux, pierres précieuses, perles fines, objets de collection, objets en or et en argent, collections philatéliques et numismatiques, tableaux, tapisseries, fourrures » d'après la Garantie Mutuelle des Fonctionnaires ; « objets mobiliers d'une valeur unitaire supérieure au nombre de fois l'indice indiqué au tableau des montants de garantie » selon les Assurances Générales de France) est soumise à une réglementation contractuelle très stricte qui impose une coassurance à l'individu. Cette coassurance obligatoire n'est pas négligeable puisque selon les compagnies l'individu garde à sa charge 60% à 70% du sinistre affectant les objets de valeur. Il est, en revanche, possible à ce même individu d'assurer partiellement ou totalement le reste de son patrimoine (voir par exemple les contrats Assurances Générales de France). Cette pratique de partage du risque sur les objets de valeur trouve certainement sa source dans la notion de risque moral. On sait que les assureurs ont souvent été victimes en

---

1. L'analyse en temps continu permet d'obtenir des résultats intéressants. Comme l'ont montré récemment Jarrow et Rosenfeld (1984), le risque de saut (i.e. processus poissonien) a un impact non négligeable sur le prix d'équilibre des actifs. D'après ces auteurs, le risque de saut est non diversifiable bien que les actifs considérés soient parfaitement négociables.

la matière de manoeuvres frauduleuses. Mentionnons toutefois la possibilité pour l'individu d'obtenir auprès de certaines compagnies des contrats sur mesure pour ses objets précieux. Dans ce qui suit, cette opportunité n'est pas considérée. Pour conclure sur la tarification, remarquons qu'un facteur de chargement unique a été pris en considération. Dans un paragraphe ultérieur, nous abandonnerons cette restriction et introduirons deux facteurs de chargement distincts.

L'utilisation des équations (1) à (4) nous permet d'écrire la contrainte budgétaire de l'individu :

$$\begin{aligned} dW(t) = \{ & (\mu_1 \alpha_1(t) + \mu_2 \alpha_2(t) + (1 - \alpha_1(t) - \alpha_2(t))r)W(t) \\ & - P(\beta_1(t), \beta_2) - c(t)\} \, dt \\ & + \sigma_1 \alpha_1(t) W(t) \, dz_1(t) + \sigma_2 \alpha_2(t) W(t) \, dz_2(t) \\ & + (\beta_1(t) - 1) \alpha_1(t) W(t) dq(t) + (\beta_2 - 1) \alpha_2(t) W(t) dq(t) \end{aligned} \tag{5}$$

avec c consommation par unité de temps et $W(0) = W_o$.

La fonction objectif de l'individu s'énonce :

$$\max_{c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1} E_o \int_o^T u(c(t), t) \, dt \tag{6}$$

où E_o est l'opérateur d'espérance conditionnelle. La fonction d'utilité additive u est supposée strictement concave en la consommation. La durée de vie de l'individu T est connue avec certitude et le legs à la mort de celui-ci est nul par hypothèse. La maximisation (6) est soumise aux contraintes (5) et $W(0) = W_o$. L'espace des opportunités est supposé constant.

III. RÈGLES OPTIMALES DE CONSOMMATION, PORTEFEUILLE ET ASSURANCE

Nous utilisons la programmation dynamique stochastique pour dériver les trajectoires optimales de consommation, portefeuille et assurance de l'individu :

soit $$J[W(t), t] = \max_{c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1} E_t \int_t^T u(c(s), s) ds$$

Définissons :

$$\begin{aligned} & \phi(c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, W, t) = J_t + u(c) \\ & + [\alpha_1(\mu_1 - r) W + \alpha_2(\mu_2 - r) W + rW \\ & - (1 + \theta)\lambda(\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2) W - c] J_W \\ & + \frac{1}{2} J_{ww} W^2[\sigma_1^2 \alpha_1^2 + 2 \sigma_1 \sigma_2 \rho \alpha_1 \alpha_2 + \sigma_2^2 \alpha_2^2] \\ & + \lambda [J(W + (\beta_1 - 1) \alpha_1 W + (\beta_2 - 1) \alpha_2 W) - J(W)] \end{aligned}$$

Par souci de brièveté les indices temps ont été suprimés.

Les contrôles optimaux c^*, α_1^*, α_2^*, β_1^* sont donnés par la version étendue du théorème 1 de Merton (*cf.* Dreyfus (1965) et Kushner (1967)) :

Théorème 1 : Sous notre jeu d'hypothèses les contrôles optimaux c^*, α_1^*, α_2^*, β_1^*, sont tels que :

$$0 = \phi(c^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, W, t) > \phi(c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, W, t) \qquad t \varepsilon [o, T]$$

Ce théorème permet d'écrire :

$$0 = \underset{c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1}{\text{Max}} \; \phi(c, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, W, t)$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$0 = \phi_c(c^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) = u'(c^*) - J_w \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 0 = \phi_{\alpha_1}(c^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) &= \{(\mu_1 - r)\, W - (1 + \theta)\lambda\beta_1^* W\}\, J_W \\ &+ (\beta_1^* - 1)\, W\lambda\, J_w(W + (\beta_1^* - 1)\, \alpha_1^*\, W + (\beta_2 - 1)\alpha_2^*\, W) \\ &+ (\sigma_1^2 \alpha_1^* + \sigma_1\sigma_2\rho\,\alpha_2^*)\, W^2\, J_{ww}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 0 = \phi_{\alpha_2}(c^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) &= \{(\mu_2 - r)\, W - (1 + \theta)\lambda\beta_2^* W\}\, J_W \\ &+ (\beta_2^* - 1)\, W\lambda\, J_w(W + (\beta_1^* - 1)\, \alpha_1^*\, W + (\beta_2 - 1)\alpha_2^*\, W) \\ &+ (\sigma_2^2 \alpha_2^* + \sigma_1\sigma_2\rho\,\alpha_1^*)\, W^2\, J_{ww}) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 0 = \phi_{\beta_1}(c^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) &= -(1 + \theta)\,\lambda\, W\alpha_1^*\, J_W \\ &+ \alpha_1^*\lambda\, WJ_w(W + (\beta_1^* - 1)\, \alpha_1^*\, W + (\beta_2 - 1)\, \alpha_2^*\, W) \end{aligned} \tag{10}$$

L'analyse des conditions de premier ordre peut maintenant être entreprise.

La condition (7) est la condition enveloppe traditionnelle d'égalité entre l'utilité marginale de la consommation et l'utilité marginale de la richesse (consommation future).

Les conditions (8) et (9) correspondent à des équations de portefeuille reflètant la disponibilité de couvertures d'assurance.

La condition (10) offre un intérêt tout particulier puisqu'elle permet de vérifier si la proposition de Mossin — Smith est toujours valable. Il suffit pour cela de reporter $\theta = 0$ dans (10). On obtient alors :

$$0 = -J_w + J_w(W + (\beta_1^* - 1)\, \alpha_1^*\, W + (\beta_2 - 1)\, \alpha_2^*\, W) \tag{10'}$$

La condition (10') montre que $\beta_1 = 1$ est une stratégie sous-optimale (sauf pour $\beta_2 = 1$ et/ou $\alpha_2^* = 0$). La proposition de Mossin — Smith est violée et il apparaît clairement que la décision optimale d'assurance dépend de la décision de portefeuille et de la réglementation en vigueur. Il peut en effet arriver que l'individu surassure son premier actif pour obtenir indirectement la couverture manquante. Sous tarification actuarielle, la condition de premier ordre (10) est satisfaite lorsque :

$$\beta_1^* = 1 - (\beta_2 - 1)\, \alpha_2^*/\alpha_1^* \tag{10''}$$

(10″) montre clairement que pour des valeurs de α_2^* positives et pour des valeurs de β_2 strictement inférieures à un, le taux de couverture d'assurance optimal est supérieur à un. Il implique en fait pleine couverture sur les deux actifs. En d'autres termes l'individu surassure son premier actif afin de parvenir à couvrir totalement son second actif[2]. Le cas examiné par Doherty et Schlesinger (1983) est aisément appréhendé dans ce modèle. En effet, un actif non assurable signifie que $\beta_2 = 0$. (10″) se modifie alors en (10‴) :

$$\beta_1^* = 1 + \alpha_2^*/\alpha_1^* \tag{10'''}$$

La décision de portefeuille a un effet en retour évident sur la décision optimale d'assurance. L'optimum de couverture d'assurance dépend de l'exposition relative au risque de l'individu que l'on peut caractériser par le ratio α_2^* / α_1^*. Il appert également que toute législation interdisant la surassurance réduit le bien-être de l'individu.

Théorème : Sous nos hypothèses, la décision d'assurance n'est jamais séparable de la décision de portefeuille et de la réglementation contractuelle.

Comme le notent déjà Doherty/Schlesinger (1983), la proposition traditionnelle de Mossin — Smith n'est finalement qu'un cas particulier. Le montant optimal d'assurance dépend de l'exposition au risque du portefeuille de l'individu. Une spécification explicite des préférences de l'individu permet un calibrage plus fin de ces premiers constats.

IV. SOLUTIONS ANALYTIQUES DANS LE CAS ISOÉLASTIQUE

Supposons comme précédemment que la fonction d'utilité de l'individu s'écrive $u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$ avec $\beta = 1 - \gamma$ aversion relative pour le risque constante.

On peut alors énoncer les stratégies optimales de l'individu sous forme explicite[3] :

$$\alpha_1^* = \frac{(\mu_1 - r) - \lambda(1+\theta)}{(1-\gamma)\sigma_1^2(1-\rho^2)} - \rho\,\frac{(\mu_2 - r) - \lambda(1+\theta)}{(1-\gamma)(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} \tag{11}$$

$$\alpha_2^* = \frac{(\mu_2 - r) - \lambda(1+\theta)}{(1-\gamma)\sigma_2^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho\,\alpha_1^* \tag{12}$$

$$\beta_1^* = 1 + \frac{(1+\theta_1)^{\frac{1}{\gamma-1}} - 1}{\alpha_1^*} - \frac{(\beta_2 - 1)\alpha_2^*}{\alpha_1^*} \tag{13}$$

$$c^*(t) = \frac{K}{(\gamma - 1) - e^{-K/(\gamma-1)(T-t)}(\gamma - 1)}\,W \tag{14}$$

2. On peut remarquer que (10″) implique pleine couverture sur les deux actifs. En effet, l'indemnité après sinistre est α_1^* / α_2^*. Ceci n'est pas surprenant puisque notre cadre correspond au cas d'une corrélation positive parfaite des sinistres.

3. Le taux d'impatience de l'individu est supposé nul.

$$\text{avec } K = \gamma\Big[(\mu_1 - r)\alpha_1^* + (\mu_2 - r)\alpha_2^* + r - (1 + \theta)(\beta_1^* \alpha_1^* + \beta_2 \alpha_2^*)$$
$$+ \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\alpha_1^{*2}\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho\,\alpha_1^*\alpha_2^* + \sigma_2^2\,\alpha_2^{*2})\Big]$$
$$+ \gamma\Big[(1 + (\beta^* - 1)\alpha_1^* + (\beta_2 - 1)\alpha_2^*)\,\gamma - 1\Big]$$

Un deuxième théorème peut être formulé :

Théorème : Dans le cas d'utilité marginale isoélastique, $u'(c) = c^{\gamma - 1}$, $\gamma < 1$, les décisions d'assurance et de portefeuille sont indépendantes de la décision de consommation. L'inverse n'est en revanche pas vrai sauf dans le cas logarithmique ($\gamma = 0$).

On peut, en effet, remarquer que α_i^* et β_1^* ne dépendent pas de $c^*(t)$. L'expression (13) donne la couverture optimale d'assurance. Le dernier terme de cette expression est d'une grande importance puisque dans le cas d'une tarification actuarielle ($\theta = 0$), elle se transforme en :

$$\beta_1^* = 1 - \frac{\alpha_2^*(\beta_2 - 1)}{\alpha_1^*} \tag{15}$$

On retrouve bien l'expression (10″) précédente. Cela n'a rien d'étonnant puisqu'un examen attentif de (13) montre que sous tarification actuarielle le paramètre d'utilité disparaît. La décision optimale d'assurance actuarielle ne dépend pas de la fonction d'utilité choisie.

Il est également intéressant de constater que β_1^* peut être supérieur ou égal à un même sous tarification inéquitable. En effet, l'examen de (13) montre que si le facteur θ est suffisamment petit, la surassurance peut être optimale. Deux forces sont à l'oeuvre. La première est due au risque qui incite l'individu à demander plus de couverture. La seconde traduit un effet prix via θ qui rend la couverture d'assurance plus onéreuse et qui affecte également l'exposition relative au risque de l'individu. L'action conjuguée de ces deux forces détermine la coassurance optimale. Nous reviendrons en détail sur ce point dans le paragraphe consacré à la simulation numérique.

V. SOLUTIONS EXPLICITES SOUS CHARGEMENTS MULTIPLES

L'analyse précédente a supposé que la compagnie d'assurance n'introduisait qu'un facteur de chargement unique dans sa tarification. Il est possible d'abandonner cette hypothèse en supposant que la compagnie opère une distinction entre le premier et le second actif.

L'expression (4) est modifiée :

$$P(\beta_1, \beta_2) = \lambda\,((1 + \theta_1)\,\beta_1\,\alpha_1 + (1 + \theta_2)\beta_2\,\alpha_2)\;W \tag{16}$$

où θ_1 et θ_2 sont respectivement le facteur de chargement afférent au premier et au second actif. On peut justifier cette différence de facteur par des coûts de traitement de sinistres dissemblables.

Sous le système de préférences précédent, la stratégie optimale de l'individu s'écrit :

$$\alpha_1^* = \frac{(\mu_1 - r) - \lambda(1 + \theta_1)}{(1-\gamma)\sigma_1^2(1-\rho^2)} - \rho \; \frac{(\mu_2 - r) - \lambda(1+\theta_1) - \lambda\beta_2(\theta_2 - \theta_1)}{(1-\gamma)(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} \tag{17}$$

$$\alpha_2^* = \frac{(\mu_2 - r) - \lambda(1+\theta_1) - \lambda\beta_2(\theta_2 - \theta_1)}{(1-\gamma)\sigma_2^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho\alpha_1^* \tag{18}$$

$$\beta_1^* = 1 + \frac{(1+\theta_1)^{\frac{1}{\gamma - 1}} - 1}{\alpha_1^*} - \frac{(\beta_2 - 1)\alpha_2^*}{\alpha_1^*} \tag{19}$$

$$c^*(t) = \frac{K}{(\gamma - 1) - e^{-K/(\gamma - 1)(T - t)}(\gamma - 1)} \tag{20}$$

où K est défini comme précédemment sauf pour θ_1 et θ_2.

La nouveauté du système (17)−(20) par rapport au système (11)−(14) réside dans les expressions (17) et (18). En effet, la décision de portefeuille dépend désormais de β_2. Ce n'était pas le cas dans (12). Schulenburg (1986) montre que les marchés réglementés d'assurance ont une influence décisive sur le comportement d'achat de couverture dans les marchés libres d'assurance. Nous étendons son résultat à la détention d'actifs risqués. Les dérivées partielles de α_1^* et α_2^* par rapport à β_2 synthétisent cet effet[4] :

$$\frac{\partial\alpha_1^*}{\partial\beta_2} = \rho \frac{\lambda(\theta_2 - \theta_1)}{(1-\gamma)(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} \tag{21}$$

$$\frac{\partial\alpha_2^*}{\partial\beta_2} = - \frac{\lambda(\theta_2 - \theta_1)}{(1-\gamma)\sigma_2(1-\rho^2)} \tag{22}$$

D'après (21), les seuls cas où α_1^* n'est pas affecté par $\beta_2 > 0$ sont ceux pour lesquels $\rho = 0$ et/ou $\theta_2 = \theta_1$. Pour α_2^*, l'influence de β_2 joue dès lors que la tarification comporte deux facteurs de chargement différents. L'introduction d'une tarification nouvelle est donc loin d'être neutre. Ceci est d'autant plus vrai que la stratégie optimale de l'individu repose sur des interactions complexes entre choix de portefeuille et choix d'assurance. Le recours à une simulation numérique est éclairant à ce propos.

VI. SIMULATION NUMÉRIQUE

Le but de cette section est d'analyser les modifications apportées, à la demande optimale d'assurance, par l'introduction de marchés d'assurances incomplets. Le

4. Lorsque $\rho = 0$ et $\lambda = 0$

$$\alpha_i^* = \frac{(\mu_i - r)}{(1-\gamma)\sigma_i^2} \qquad i = 1,2$$

qui correspond au résultat de Merton (1969).

système optimal (11)−(14) constitue le support de notre investigation. Les résultats obtenus sont bien entendu transposables au cas plus simple où un seul facteur de chargement est retenu dans le processus tarifaire.

Nous distinguons trois catégories d'assurés. Le tableau suivant présente les effets sur la couverture optimale d'assurance de changements survenant dans le niveau de la couverture réglementaire et des facteurs.

Données numériques :

$\mu_1 = 12\%$ $\sigma_1 = 0{,}10$ $\rho = 0$ $\lambda = 0{,}01$
$\mu_2 = 14\%$ $\sigma_2 = 0{,}15$ $r = 10\%$

	Faible aversion au risque	Logarithmique	Forte aversion au risque
	$1-\gamma = 0{,}35$	$1-\gamma = 1$	$1-\gamma = 3$
$\beta_2 = 0{,}1$			
$\theta_1 = 30\%$; $\theta_2 = 15\%$	2,29	2,22	2,20
$\theta_1 = 60\%$; $\theta_2 = 30\%$	2,79	2,49	2,37
$\beta_2 = 0{,}8$			
$\theta_1 = 30\%$; $\theta_2 = 15\%$	1,09	1,03	0,99
$\theta_1 = 60\%$; $\theta_2 = 30\%$	0,93	0,65	0,48

On peut constater que ce tableau contient des résultats nouveaux. Il faut tout d'abord souligner qu'en dépit de la présence de facteurs de chargement non nuls la pleine assurance ou la surassurance est souvent optimale. L'impact de la couverture réglementée est également tout à fait significatif et conduit à un résultat qui peut paraître surprenant de prime abord : contrairement aux propositions de la littérature, l'optimum d'assurance n'est pas relié de façon monotone aux facteurs de chargement. Lorsque β_2 est égale à 0,1, la couverture optimale s'accroît alors que l'assurance devient plus onéreuse. Au contraire, lorsque β_2 est égal à 0,8, la demande d'assurance diminue en réponse à un renchérissement similaire de l'assurance. Un tel phénomène contredit par exemple la proposition 3,5 de Kahane et Kroll (1985) selon laquelle *the amount of insurance purchased decreases with the loading factor.*

On peut toutefois donner une explication solide à cette contradiction par l'examen attentif de la stratégie optimale de l'assuré. Si l'on considère le cas de l'individu logarithmique, il est facile de voir que, sous nos hypothèses numériques, un accroissement des facteurs de chargement affecte fortement l'exposition relative au risque α_2^* / α_1^* de l'individu. La détention du premier actif chute fortement alors que celle du second actif ne varie que faiblement. Ainsi, pour $\beta_2 = 0{,}1$, l'exposition relative au risque passe de 1,71 à 2,7. Pour $\beta_2 = 0{,}8$, cette même exposition au risque passe de 1,78 à 2,92. Lorsque β_2 est faible, cette détérioration de l'exposition au risque joue fortement et incite l'individu à demander plus d'assurance. L'effet prix est dominé. En revanche, pour des valeurs de β_2 proches de l'unité, l'effet de dégradation de l'exposition au risque n'est pas très sensible et l'individu diminue sa couverture d'assurance. Dans le cas de Kahane et Kroll (1985), ce phénomène est supprimé par l'introduction d'une hypothèse très restrictive. En effet, en ne considérant que deux actifs (l'un risqué et l'autre sans risque), Kahane et Kroll supposent *de facto* que la composition du portefeuille risqué n'a aucun effet sur la demande d'assurance. Cette restriction est d'ailleurs manifeste puisqu'ils soulignent que l'actif risqué peut être interprêté comme un portefeuille d'actifs risqués.

Cette simulation montre combien les déterminants de la demande optimale d'assurance-dommages sont complexes. Les décisions de portefeuille de l'individu ont un impact non négligeable sur les choix d'assurance.

Il appert que, même dans le cas d'une corrélation positive parfaite des sinistres, les propriétés de la demande d'assurance ne sont pas aussi saillantes que la littérature récente pourrait le laisser croire.

VII. REMARQUES FINALES

Le modèle présenté ci-dessus généralise les résultats de contributions antérieures. Il a été montré que la demande d'assurance est très fortement affectée par la plus ou moins grande exposition du portefeuille de l'individu à des risques multiples. Le cadre initial proposé par Merton a été élargi pour intégrer l'occurence de sinistres, la demande d'assurance et la réglementation des contrats d'assurance. Ce cadre d'investigation s'est révélé fructueux puisqu'il a permis de délivrer un traitement simultané et continu des décisions de consommation, portefeuille et assurance.

D'autres ouvertures de recherche sont bien entendu envisageables. Des opportunités d'investissement stochastiques pourraient être introduites en rendant μ, σ et r dépendants de certaines variables d'état. L'hypothèse de constance de ces paramètres correspond en effet à une économie très particulière dans laquelle les anticipations sur les rendements futurs des actifs sont fixées. Il s'agit en quelque sorte pour reprendre l'expression de Merton (1971) d'un *long run equilibrium*. Merton a d'ailleurs montré que la formulation de dynamiques de prix des actifs plus générales avait un impact non négligeable sur les décisions de portefeuille optimales. On peut dès lors s'attendre à ce que la décision d'assurance affiche elle aussi une certaine sensibilité à la dynamique de prix retenue. Le ou les salaires de l'individu pourrai(en)t être considéré(s) sous forme explicite. Enfin, nous pourrions abandonner l'hypothèse de séparabilité intertemporelle des préférences. La consommation passée de l'individu apparaîtrait comme argument supplémentaire de sa fonction d'utilité (*cf.* Ryder et Heal (1973)). Une telle extension est d'autant plus légitime que les séries statistiques de consommation des pays industrialisés sont remarquablement régulières. Selon Sundaresan (1985), ce comportement de « lissage » des agents économiques entraîne des changements substantiels dans les choix de consommation et de portefeuille optimaux. Nul doute que la demande d'assurance s'en trouverait elle aussi profondément affectée.

BIBLIOGRAPHIE

ARROW, KENNETH J., « Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care », *American Economic Review*, 1963, pp. 941-973.

ARROW, KENNETH J., « Optimal Insurance and Generalized Deductibles », *Scandinavian Actuarial Journal*, 1974, pp. 1-42.

BRIYS, ERIC, « Insurance and Consumption : the Continuous-Time Case », *Journal of Risk and Insurance*, 1986, pp. 718-723.

BRIYS, ERIC et LOUBERGÉ, HENRI, « On the Theory of Rational Insurance Purchasing », *Journal of Finance*, 1985, pp. 577-581.

DIONNE, GEORGES et EECKHOUDT, LOUIS, « Insurance and Saving : Some Further Results », *Insurance : Mathematics and Economics*, 1984, pp. 101-110.

DOHERTY, NEIL, « Portfolio Efficient Insurance Buying Strategies », *Journal of Risk and Insurance*, 1984, pp. 205-224.

DOHERTY, NEIL et SCHLESINGER, HARRIS, « Optimal Insurance in Incomplete Markets », *Journal of Political Economy*, 1983, pp. 1945-54.

DREYFUS, S., *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*, Academic Press, New York, 1965.

FAMA, EUGÈNE et MILLER, MERTON, *The Theory of Finance*, Holt Rinehart et Winston, 1972.

GOULD, J.P., « The Expected Utility Hypothesis and the Selection of Optimal Deductibles for a Given Insurance Policy », *Journal of Business*, 1969, pp. 143-151.

JARROW, ROBERT et ROSENFELD, ERIC, « Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model », *Journal of Business*, 1984, pp. 337-351.

KUSHNER, H.J., *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, 1967.

MARKOWITZ, HARRY, « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, 1952, pp. 77-91.

MAYERS, DAVID et SMITH, CLIFFORD, « The Interdependance of Individual Portfolio Decisions and the Demand for Insurance », *Journal of Political Economy*, 1983, pp. 304-11.

MERTON, ROBERT, « Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : the Continuous Time Case », *Review of Economics and Statistics*, 1969, pp. 239-246.

MERTON, ROBERT, « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model » *Journal of Economic Theory*, 1971, pp. 373-413.

MORIN, R.A. et SUAREZ, A.F., « Risk Aversion Revisited », *Journal of Finance*, 1983, pp. 1201-16.

MOSSIN, JAN, « Aspects of Rational Insurance Purchasing », *Journal of Political Economy*, 1968, pp. 553-568.

RAZIN, ASSAF, « Rational Insurance Purchasing », *Journal of Finance*, 1976, pp. 133-137.

RICHARD, SCOTT, « Optimal Consumption, Portfolio and Life Insurance Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model », *Journal of Financial Economics*, 1975, pp. 187-203.

RYDER, H. et HEAL, G., « Optimal Growth with Intertemporally Dependent Preferences », *Review of Economic Studies*, 1973.

SCHULENBURG, MATHIAS, « Optimal Insurance Purchasing in the Presence of Compulsory Insurance and Insurable Risks », *Geneva Papers of Risk and Insurance*, 1986, pp. 5-16.

SMITH, VERNON, « Optimal Insurance Coverage », *Journal of Political Economy*, 1986, pp. 60-77.

SUNDARESAN, SURESH, « Intertemporally Dependent Preferences in the Theories of Consumption, Portfolio Choice and Equilibrium Asset Pricing », Working Paper, 1985, Columbia University.