L'Actualité économique

# Vers une tarification équitable de l’assurance?
# Towards equitable insurance tariffs

Jean-Charles Rochet

Volume 61, numéro 4, décembre 1985

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601347ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601347ar



Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)



Citer cet article

Rochet, J.-C. (1985). Vers une tarification équitable de l’assurance? *L'Actualité économique*, *61*(4), 453–471. https://doi.org/10.7202/601347ar

Résumé de l'article

L’intensification de la concurrence sur certains marchés d’assurance a encouragé l’émergence du principe de la *personnalisation* des primes, qui s’oppose au traditionnel principe de *mutualisation* des risques. Menée à son extrême, la personnalisation conduirait à une tarification « équitable » de l’assurance, c’est-à-dire telle que la prime de chaque assuré est exactement proportionnée au risque qu’il représente. Cet article se propose de répondre à deux questions :

1) comment construire un tarif équitable, compte tenu de l’imperfection des critères à la disposition de l’assureur?

2) un tarif équitable est-il vraiment souhaitable?

L'Actualité Économique, Revue d'analyse économique, vol. 61 no. 4 décembre 1985

# VERS UNE TARIFICATION ÉQUITABLE DE L'ASSURANCE ?

Jean-Charles ROCHET*

L'intensification de la concurrence sur certains marchés d'assurance a encouragé l'émergence du principe de la *personnalisation* des primes, qui s'oppose au traditionnel principe de *mutualisation* des risques. Menée à son extrême, la personnalisation conduirait à une tarification « équitable » de l'assurance, c'est-à-dire telle que la prime de chaque assuré est exactement proportionnée au risque qu'il représente. Cet article se propose de répondre à deux questions :
1) comment construire un tarif équitable, compte tenu de l'imperfection des critères à la disposition de l'assureur ?
2) un tarif équitable est-il vraiment souhaitable ?

*Towards equitable insurance tariffs.* — The intensification of competition on insurance markets is giving more and more audience to the principle of *premiums personalization.* Antagonistic to the traditional principe of *risks mutualization,* this new trend aims at "equitable" insurance tariffs, i.e. tariffs such that premiums are exactly proportioned to risks. This article is concerned with two questions:
1. Is it possible to design such equitable tariffs, considering the fact that insurers have only incomplete information about the insured?
2. Are equitable tariffs really desirable?

## I — Introduction

Le principe fondateur de l'activité d'assurance est celui de la *mutualisation* des risques individuels, c'est-à-dire de la mise en commun par un groupe d'agents économiques d'une partie de leurs ressources, afin de dédommager les membres de ce groupe qui seraient victimes de sinistres. Ce principe suppose une participation égale des différents membres de la

*Remerciements* : Cette recherche a été réalisée en partie pendant mon séjour au Département d'économie de l'Université de Montréal. J'ai également bénéficié de discussions avec Georges Dionne, Claude Henry et surtout Dominique Henriet. Toute erreur ou inexactitude est sous ma seule responsabilité.

* Professeur invité à l'Université de Montréal ; CEREMADE, Université Paris 9 et Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, Paris.

communauté, ou peut-être une participation de chacun suivant ses ressources, mais en aucun cas une participation proportionnée au risque représenté par chacun.

L'intensification de la concurrence sur les marchés d'assurance de certains pays, notamment en assurance automobile, a cependant encouragé l'émergence d'un principe antagoniste qui est celui de la *personnalisation* des primes. L'idée est que chaque assuré doit se voir proposer une prime proportionnelle ou même égale (compte tenu des coûts de gestion des compagnies) au risque qu'il représente, sous peine de voir une autre compagnie attirer ce client par un contrat plus alléchant. Malgré l'opposition de beaucoup d'assureurs à ce principe de personnalisation, on peut lui trouver des vertus d'*équité* (chacun paie suivant le risque qu'il fait supporter à la collectivité) et même le réconcilier avec le principe de mutualisation : il suffit pour cela (sous réserve que le marché soit assez vaste) de grouper les individus en mutualités homogènes du point de vue du risque. Le débat entre mutualisation et personnalisation est de toute façon impossible à trancher dans l'absolu. Il est clair qu'il ne se pose pas dans les mêmes termes selon que l'on s'intéresse à l'assurance maladie ou à l'assurance automobile. De même ne peut-on pas avoir la même attitude envers un transporteur routier et le propriétaire d'une voiture de sport même s'ils représentent tous deux un risque automobile aggravé.

Nous nous proposons simplement dans cet article de répondre aux deux questions suivantes : 1) comment construire un tarif équitable ? 2) un tarif équitable est-il toujours souhaitable ? En dépit des apparences, les réponses à ces questions ne sont pas immédiates.

La difficulté de la première question vient de ce que les assureurs n'ont qu'une information incomplète sur leurs clients. Il est bien connu que les caractéristiques observables des assurés (qui seules peuvent être utilisées dans la tarification) n'expliquent qu'une faible partie des risques représentés par ceux-ci. Le seul remède à cette imperfection passe par une *autosélection* des assurés au moyen d'une différenciation des couvertures proposées à ceux-ci, c'est-à-dire un barême non linéaire, liant la prime à payer au montant de la franchise acceptée.

La signification de la deuxième question est la suivante : partant d'une tarification équitable sur une population donnée d'assurés, n'est-il pas possible d'améliorer la situation de chacun d'eux en s'autorisant à procéder à des subventions des hauts risques par les bas risques. Dans un tel cas, la notion de tarif équitable perdrait une partie de son intérêt, en tout cas du point de vue normatif.

Le plan de l'article est le suivant : dans la deuxième partie nous montrons comment construire des tarifs équitables dans le cas d'un risque unique ; la troisième partie s'intéresse au cas des polices multiples ; la quatrième partie est consacrée à l'optimalité au sens de Pareto des tarifs équitables.

## II — Tarifs équitables : le cas d'un risque unique

Nous adopterons dans cette partie le modèle d'assurances le plus simple, déjà utilisé par exemple par Rothschild-Stiglitz [1976] et Wilson [1977]. Le marché est constitué par une population de consommateurs riscophobes ne différant que par leur probabilité $p$ d'accident. L'accident correspond à une perte monétaire $L$ et l'utilité d'un consommateur vaut donc :

$$V_0 = pu(R-L) + (1-p)\, u(R) \tag{1}$$

s'il ne s'assure pas et :

$$V = pu(R-F-P) + (1-p)\, u(R-P) \tag{2}$$

s'il choisit un contrat comprenant une prime $P$ et une franchise $F$.

$R$ est le revenu de chaque agent, supposé le même pour tous et $u$ est leur fonction d'utilité et Von Neumann-Morgenstern, supposée croissante, strictement concave et deux fois dérivable. Nous la normalisons par les deux conventions suivantes :

$$u(R-L) = 0 \quad \text{et} \quad u(R) = 1 \tag{3}$$

Nous supposerons que la distribution des risques dans la population a une densité $f(p)$ sur un support $[\underline{p}, \overline{p}]$ inclus dans $]0, 1[$.

Un barême non linéaire d'assurance est une famille de contrats $(F, P(F))$ où la prime à payer est fonction non linéaire du montant de la franchise choisie. Confronté à un tel barême le consommateur de risque $p$ choisit le niveau de franchise $\hat{F}(p)$, supposé unique, tel que :

$$\hat{F}(p) \text{ réalise } \underset{F}{\text{Max}} \{pu\,(R-F-P\,(F)) + (1-p)\, u(R-P(F))\} \tag{4}$$

Nous dirons alors que $F \to P(F)$ est un tarif équitable s'il est *actuariel ex post*, c'est-à-dire si le contrat choisi par l'individu de type $p$ se trouve vérifier (*ex post*) l'égalité entre prime payée et espérance de remboursement *pour une probabilité d'accident p*, soit

$$\forall\, p \in [\underline{p}, \overline{p}] : P(\hat{F}(p)) = p(L - \hat{F}(p)) \tag{5}$$

Définition 1 : *Un tarif équitable d'assurance sur* $[\underline{p}, \overline{p}]$ *est constitué d'un couple de fonctions*

$$\begin{cases} P : [0, L] \to R_+ \\ \hat{F} : [\underline{p}, \overline{p}] \to [0, L] \end{cases}$$

*qui vérifient les deux relations (4) et (5).*

Nous pouvons remarquer dès à présent que la notion de tarif équitable ne dépend pas de la distribution des risques, mais uniquement des valeurs extrêmes de ceux-ci dans une population, $\underline{p}$ et $\overline{p}$. Nous verrons l'importance de cette remarque dans la quatrième partie.

Avant de prouver analytiquement l'existence de tels tarifs équitables, et de montrer comment on peut calculer ceux-ci, il convient de remarquer l'analogie étroite entre ce concept de tarif équitable et celui d'« équilibre avec signal » proposé par Spence [1974] pour décrire le fonctionnement de certains marchés du travail. Riley [1975] a proposé un modèle plus général, susceptible de s'appliquer, entre autres, aux marchés d'assurances. Cresta-Laffont [1982] ont précisément montré l'existence de tarifs équitables d'assurance dans le cas d'un seul risque. La méthode que nous proposons ici est plus simple et plus générale : elle donne le moyen de calculer explicitement ces tarifs équitables, et de plus elle permet de s'attaquer au cas de polices multiples, c'est-à-dire de plusieurs risques indépendants assurés simultanément.

Pour la commodité de l'exposé des résultats nous introduirons quelques notations :

$$\theta = \frac{p}{1-p} \quad (\text{« odds ratio »}) \tag{6}$$

avec les bornes correspondantes $\underline{\theta} = \dfrac{\underline{p}}{1-\underline{p}}$, $\quad \overline{\theta} = \dfrac{\overline{p}}{1-\overline{p}}$

$$V(\theta) = \operatorname*{Max}_{F}\{\theta\, u(R-F-P(F)) + u(R-P(F))\} \tag{7}$$

(fonction d'utilité indirecte)

$$y = u(R-F-P(F)) \tag{8}$$

(niveau d'utilité en cas d'accident)

$$z = u(R-P(F)) \tag{9}$$

(niveau d'utilité s'il n'y a pas d'accident)

Il est facile de voir qu'un barême d'assurance $(F, P(F))$ peut se représenter de manière équivalente par une fonction $z = \psi(y)$ de $[0, 1]$ dans lui-même (grâce à la convention (3)) qui associe au niveau d'utilité en cas de sinistre le niveau d'utilité en cas de non-réalisation du sinistre. On a alors les deux résultats suivants, démontrés en annexe :

PROPOSITION 1 : *Le tarif* (F, P(F)) *est équitable si et seulement si la fonction d'utilité indirecte associée est une fonction convexe, solution presque partout sur* $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ *de :*

$$\begin{cases} v(V(\theta) - \theta V'(\theta)) = R + \theta(R-L-v(V'(\theta))) & (10) \\ \text{et} & \\ V'(\theta) \in [0, 1] & (11) \end{cases}$$

*Proposition 2 : Supposons que* F $\rightarrow$ P(F) *soit dérivable. Alors il constitue un tarif équitable si et seulement si l'application* $z = \psi(y)$ *qui lui est associée par (8), (9) est une solution concave non triviale de l'équation :*

$$v(\psi(y)) = R + [v(y) - R + L]\,\psi'(y) \tag{12}$$

*N.B.* : Par solution non triviale de (12) nous entendons $\psi(y) \not\equiv 1$.

La proposition 1 fournit une caractérisation complète des tarifs équitables, alors que la proposition 2 ne s'intéresse qu'à ceux qui sont dérivables. En fait l'équation (12) peut se résoudre explicitement, car elle est à variables séparables, ce qui n'est pas le cas de (11).

La résolution explicite de (12) s'effectue de la manière suivante. D'abord on sépare les variables :

$$\frac{d\psi}{R - v(\psi)} + \frac{dy}{v(y) - R + L} = 0 \tag{13}$$

Rappelons que l'on a par convention :

$$v(0) = R - L \quad \text{et} \quad v(1) = R$$

Soit $y_0 \in [0, 1]$ quelconque. On pose :

$$A(\psi) = \int_{y_0}^{\psi} \frac{ds}{R - v(s)} \quad \text{pour } \psi < 1$$

et

$$B(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{v(s) - R + L} \quad \text{pour } y > 0$$

Alors (13) a une solution unique telle que $\psi(y_0) = y_0$. Elle est définie implicitement par :

$$A(\psi(y)) + B(y) = 0$$

Enfin il est facile de voir que l'on a, quel que soit $y_0$ :

$$\lim_{\psi \to 1} A(\psi) = +\infty \quad (\text{car } v'(1) < +\infty),$$

et

$$\lim_{y \to 0} B(y) = -\infty \quad (\text{car } v'(0) < +\infty)$$

Ceci implique que toutes les solutions de (12) passent par le point (0, 1) ce qui se traduit par la propriété toute naturelle que la prime tend vers zéro quand la franchise tend vers la valeur de l'objet assuré.

PROPOSITION 3 : a) *L'équation (12) a une famille à un paramètre de solutions qui vérifient toutes :*

$$\psi(0) = 1 \tag{14}$$

b) *Chaque solution* $\psi_{y_0}$ *est caractérisée par l'abcisse* $y_0$ *de son point d'intersection avec la première bissectrice.*

c) $\psi_{y_0}$ *est concave sur* $[0, y_0]$ *mais a un point d'inflexion en* $y_0$.

d) $y_0 \rightarrow \psi_{y_0}$ *est un opérateur décroissant :*

$$\forall y_0 \; \forall y_1 \; \forall y \in [0, y_0], \; y_0 < y_1 \Rightarrow \psi_{y_0}(y) > \psi_{y_1}(y) \tag{15}$$

Nous retrouvons dans la proposition 3 les propriétés habituelles de l'équilibre avec signal du modèle de Spence : il existe une infinité de solutions, ordonnables par le critère de Pareto (car $y_0 \rightarrow \psi_{y_0}$ est un opérateur décroissant). Sur un intervalle donné de risques $[\underline{p}, \overline{p}]$ le tarif équitable optimal $\psi_{y_0}$ est tel que les plus hauts risques ($p = \overline{p}$) choisissent le point $(y_0, y_0)$, qui correspond à une franchise nulle, ou encore à l'assurance complète. On peut voir facilement que $\psi$, solution de (12), est concave en $y$ si et seulement si $\psi(y) \geqslant y$, ce qui s'interprète comme la condition naturelle de non sur-assurance ou encore de positivité de la franchise.

Afin de donner l'intuition économique de la multiplicité des tarifs équitables et de comprendre comment on obtient le tarif équitable optimal, nous nous proposons de rappeler l'analyse lumineuse faite par Wilson [1977] sous l'hypothèse d'un nombre fini de classes de risques. Partons du cas le plus simple, avec seulement deux classes de risque $p^1$ et $p^2$ (où $p^1 < p^2$). Les différents contrats seront représentés sur un diagramme portant en abcisse la couverture $q = L - F$ et en ordonnée la prime correspondante $P$. Un tarif équitable dans ce modèle à deux classes est alors simplement un couple de contrats $C^1 = (q^1, P^1)$ et $C^2 = (q^2, P^2)$ vérifiant :

$$P^1 = p^1 q^1, \quad P^2 = p^2 q^2 \quad \text{(actuarialité)}$$

ainsi que les contraintes d'autosélection :

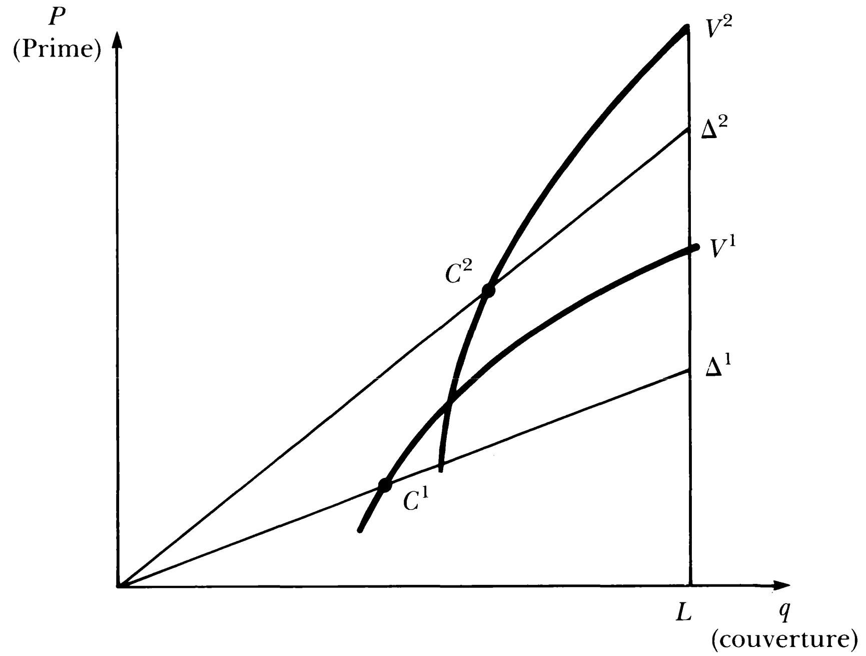
$$V^1(C^1) \geqslant V^1(C^2) \quad \text{et} \quad V^2(C^2) \geqslant V^2(C^1)$$

où $V^2$ et $V^1$ désignent respectivement les fonctions d'utilité indirecte des hauts risques et des bas risques. La figure 1 suggère clairement l'existence d'un grand nombre de tels couples de contrats.

Chaque contrat étant situé sur la droite actuarielle pour l'assuré auquel il s'adresse, l'utilité de celui-ci augmente quand la couverture augmente, c'est-à-dire lorsque les points $C^1$ et $C^2$ se déplacent vers la droite. Jusqu'où peut-on aller ? En ce qui concerne les contraintes d'autosélection, il est facile de voir que le cas limite correspond à celui où les

FIGURE 1

UN EXEMPLE DE TARIF ÉQUITABLE AVEC DEUX CLASSES DE RISQUE




consommateurs à haut risque sont exactement indifférents entre $C^1$ et $C^2$. Dans ce cas les consommateurs à bas risque préfèrent strictement $C^1$ à $C^2$.

L'autre contrainte limitant $q$ est évidemment la contrainte de non sur-assurance : $q \leq L$. On en déduit facilement que le tarif équitable optimal à deux classes de risque s'obtient comme suit (voir la figure 2) :

• $C^2$ est l'intersection de $\Delta^2$ avec $q = L$;

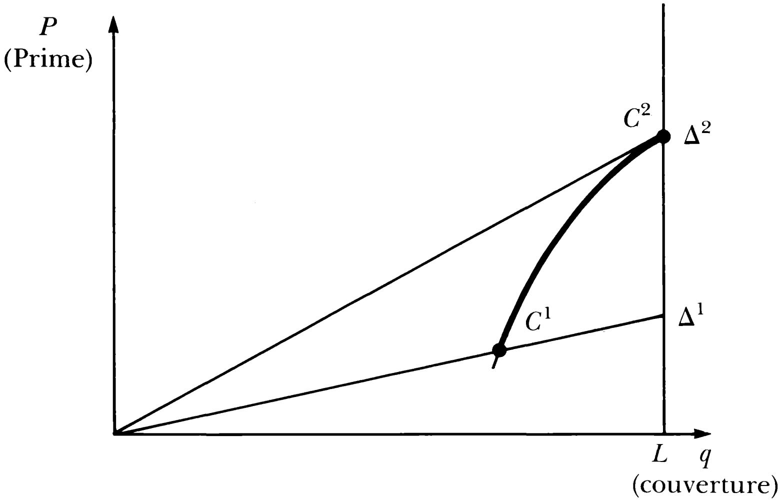
• $C^1$ est l'intersection de $\Delta^1$ avec la courbe d'indifférence des hauts risques passant par $C^2$.

La généralisation à $N$ types de risque $p^1 < p^2 < ... < p^N$ est immédiate (cf. Wilson [1977]). Le tarif équitable $\{C^1, ..., C^N\}$ est donné par les relations suivantes :

$$(S_N) \begin{cases} C^i = (q^i, P^i) \quad \text{avec} \quad P^i = p^i q^i & i = 1, ..., N \\ q^N = L & \\ V^i(C^i) = V^i(C^{i-1}), & i = 2, ..., N \end{cases}$$

FIGURE 2

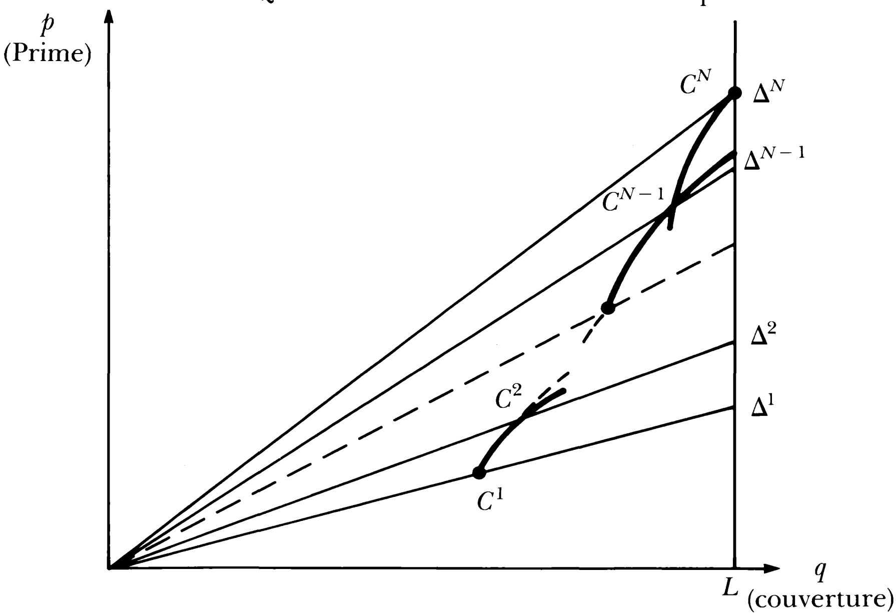
LE TARIF ÉQUITABLE OPTIMAL À DEUX CLASSES DE RISQUE




Autrement dit l'externalité consécutive à l'imperfection de l'information s'exerce des hauts risques vers les bas risques, et le contrat optimal conduit à assurer complètement les individus à plus haut risque.

FIGURE 3

LE TARIF ÉQUITABLE OPTIMAL À $N$ classes de risque



Quand on fait tendre le nombre de classes vers l'infini on obtient le tarif équitable optimal caractérisé par les propositions 1, 2 et 3. Celui-ci vérifie bien en effet :

$$(S_\infty)\quad \begin{cases} C(p) = (q(p), P(p)) \quad \text{avec} \quad P(p) = pq(p) \\ q(\bar{p}) = L \\ V_p(C(p)) = V_p(C(p - dp)) \end{cases}$$

ce que l'on peut interpréter comme la limite de $(S_N)$ quand $N$ tend vers l'infini.

## III — Tarifs équitables : le cas d'assurances multi-risques

Si la structure des équilibres avec signal est désormais bien comprise dans le cas d'un paramètre unidimensionnel, il n'en est pas de même dans les cas où plusieurs paramètres interviennent. Kohleppel [1983] a donné un exemple d'inexistence d'un tel équilibre dans un modèle satisfaisant pourtant à l'extension naturelle des hypothèses de Spence. Quinzii-Rochet [1985] ont obtenu, toujours dans le cadre du modèle de Spence, un théorème d'existence, sous une hypothèse supplémentaire de convexité. Cependant, leur système d'hypothèses ne s'applique pas à notre modèle. C'est plutôt une adaptation naturelle de la proposition 2 qui va nous donner une méthode, explicite, de calcul des primes équitables pour les assurances multi-risques. Introduisons tout d'abord quelques modifications à notre modèle. Nous supposerons désormais qu'il existe deux sinistres indépendants et non cumulables (par exemple vol et incendie) conduisant chacun à la perte de l'objet assuré, toujours évalué à $L$. Une police d'assurance multi-risques est déterminée par une prime $P$ ainsi que deux franchises $F_1$ et $F_2$ acceptées pour chacun des types de sinistre. L'utilité correspondante de l'assuré vaut alors :

$$V = p_1\, u(R-F_1-P) + p_2\, u(R-F_2-P) + (1-p_1-p_2)\, u(R-P)$$

où $p_1$ et $p_2$ sont les probabilités respectives des deux types de sinistre pour l'assuré en question. Confronté à un barème d'assurance multi-risques $(F_1, F_2, P(F_1, F_2))$ l'assuré choisira $\hat{F}(p) = (\hat{F}_1(p), \hat{F}_2(p))$ qui réalise :

$$\operatorname*{Max}_{F} \{p_1\, u(R-F_1-P(F)) + p_2\, u(R-F_2-P(F)) + (1-p_1-p_2)\, u(R-P(F))\} \tag{16}$$

Nous dirons que le barème est équitable s'il vérifie :

$$\forall p,\ P(\hat{F}(p)) = p_1\, (L-\hat{F}\ (p)) + p_2\, (L-\hat{F}_2(p))$$

On introduit le même changement de variables que dans la partie (2) :

$$y_1 = u(R-F_1-P(F)) \tag{18}$$

$$y_2 = u(R-F_2-P(F)) \tag{19}$$

$$z = \psi(y) = u(R - P(F)) \tag{20}$$

On démontre alors facilement une extension naturelle de la proposition 2.

PROPOSITION 4 : *Soit* $\hat{F}(P)$ *un tarif dérivable. Il est équitable si et seulement si l'application* $\psi$ *qui lui correspond par (18), (19), (20) est une solution concave non triviale de l'équation aux dérivées partielles :*

$$v(\psi(y)) - R = (v(y_1) - R + L)\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + (v(y_2) - R + L)\frac{\partial\psi}{\partial y_2} \tag{21}$$

Une des méthodes les plus employées par les mathématiciens pour résoudre numériquement les équations quasi-linéaires du type de (21) est la méthode dite des caractéristiques. Elle consiste à partitionner l'ensemble $[0, 1]^2$ où varie le couple $(y_1, y_2)$ en une famille de courbes paramétrées le long desquelles la résolution de (21) se ramène à celle, plus simple, d'une équation différentielle ordinaire. On commence par trouver un paramétrage $(y_1(s), y_2(s))$ tel que le second membre de (21) soit égal à la différentielle totale de la fonction $s \to \psi(y_1(s), y_2(s))$. On pose par exemple :

$$\frac{dyi}{ds} = v(y_i) - R + L \qquad i = 1,2 \tag{22}$$

Si l'on définit $\tilde{\psi}(s) = \psi(y_1(s), y_2(s))$, l'équation (21) devient :

$$\frac{d\tilde{\psi}}{ds} = v(\tilde{\psi}(s)) - R \tag{23}$$

Reprenons les notations de la partie précédente :

$$A(\psi) = \int_{y_0}^{\psi} \frac{dt}{R - v(t)}$$

$$B(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{v(t) - R + L}$$

Les équations (22) et (23) se résolvent alors implicitement :

$$s = B(y_1(s)) - B(y_1(0)) = B(y_2(s)) - B(y_2(0)) \tag*{(22)'}$$

et

$$s = A(\tilde{\psi}(0)) - A(\tilde{\psi}(s)) \tag*{(23)'}$$

Les courbes intégrales de (22) sont appelées courbes caractéristiques de l'équation (21). Elles peuvent s'écrire également, après élimination de $s$ :

$$B(y_2) - B(y_1) = C^{te} \tag{24}$$

Nous verrons tout à l'heure que ces courbes ont une interprétation économique très simple. Indiquons tout d'abord la dernière étape de la résolution de (21):

— on choisit une courbe $\Gamma$ du plan $(y_1, y_2)$ qui intersecte une fois et une seule chacune des courbes caractéristiques données par (24);
— on peut alors donner des valeurs arbitraires à $\psi(y)$ sur cette courbe $\Gamma$;
— ces valeurs déterminent ensuite complètement la solution $\psi$ par intégration le long des caractéristiques.

On aboutit finalement à l'expression de la solution générale de (21):

$$A(\psi(y)) = \phi(B(y_1) - B(y_2)) - B(y_2) \tag{25}$$

où $\phi$ est une fonction quelconque d'une variable, simplement supposée dérivable.

Il est remarquable que cette méthode s'interprète facilement du point de vue concret de la détermination des barêmes. Celle-ci se fait en deux étapes: pour un couple de couvertures $(y_1, y_2)$ demandé par un assuré, on calcule l'index suivant:

$$k = B(y_1) - B(y_2) \tag{26}$$

qui révèle en quelque sorte dans quelle mesure l'assuré en question est plus désireux de se protéger contre les sinistres de type 1 ou contre les sinistres de type 2. La tarification se fait alors indépendamment sur les différentes classes de contrats. Autrement dit pour des courbes $(y_1, y_2)$ ayant le même index $k$, l'assureur doit veiller à l'équité du tarif par rapport à $y_2$, de manière exactement analogue au cas unidimensionnel; en effet (25) peut aussi s'écrire:

$$A(\psi(y)) + B(y_2) = \phi(k) \tag{25 bis}$$

Par contre le choix de la fonction $\phi$ est complètement arbitraire: il y a donc une grande multiplicité de solutions. Comme dans le cas unidimentionnel si deux solutions $\psi_1$ et $\psi_2$ sont telles que $\psi_1 < \psi_2$ (ce qui correspond à $\phi_1 < \phi_2$) alors $\psi_1$ est préférable à $\psi_2$. La différence avec le cas unidimensionnel c'est qu'on ne peut plus ordonner *totalement* l'ensemble des solutions par le critère de Pareto. Néanmoins pour un support donné de la distribution des risques, on peut montrer l'existence d'une solution maximale au sens de l'ordre usuel, et donc aussi au sens du critère de Pareto. Mais cette solution n'est bien sûr optimale qu'en un sens très faible, dans la mesure où l'on impose à la fois les conditions d'autosélection *et* les conditions d'actuarialité *ex post*. On peut se demander si l'instauration d'un système de subventions bien choisies ne pourrait pas améliorer l'utilité de chacun des assurés. C'est le sujet que nous étudions dans la dernière partie de cet article.

## IV — Les tarifs équitables sont-ils vraiment souhaitables ?

Une des raisons souvent invoquées pour justifier la réglementation par l'état des tarifs d'assurance est la volonté, posée a priori, d'organiser une redistribution de richesse à l'intérieur de la communauté des assurés. C'est particulièrement clair dans le cas des assurances sociales où les hauts risques correspondent en général aux classes les plus défavorisées de la société. C'est aussi vrai en assurance automobile mais seulement dans certains cas : à l'égard des jeunes conducteurs par exemple, ou à l'égard des transporteurs routiers. D'un point de vue plus général il apparaît au contraire que le risque automobile est *positivement* corrélé au revenu de l'assuré par l'intermédiaire essentiellement du kilométrage parcouru.

Quoi qu'il en soit, nous nous proposons de montrer dans cette partie que les tarifs équitables étudiés plus haut peuvent dans certains cas être dominés au sens de Pareto par des systèmes de subvention des hauts risques par les bas risques. Autrement dit, sous certaines conditions, et indépendamment de toutes considérations de redistribution, il peut être dans l'intérêt général que les bas risques acceptent de verser une prime supérieure à leur prime actuarielle (la différence servant à subventionner les hauts risques), ce qui permet de relâcher leur contrainte d'autosélection et ainsi de pouvoir obtenir une couverture plus élevée de leur risque. Nous donnerons deux versions de ce résultat, correspondant respectivement aux cas de deux types de risques et d'un continuum de types.

*Proposition 5* (Henry [1985]) : *Soit $\lambda$ la proportion de bas risques dans le modèle à deux types de risques de Rothschild-Stiglitz-Wilson. Si $\lambda$ est suffisamment petit le couple de contrats équitables optimaux est Pareto dominé par un couple de contrats où les bas risques subventionnent les hauts risques.*

Une démonstration géométrique de ce résultat est facile à obtenir sur un diagramme (prime, couverture) semblable à ceux que nous avons déjà utilisés dans la partie II. Pour une démonstration analytique, on pourra consulter Henry [1985]. Pour d'autres analyses du rôle des subventions dans l'efficacité du secteur des assurances voir Miyazaki [1977] et Spence [1978]. On peut montrer que l'optimum public avec subventions domine toujours la situation obtenue avec un monopole privé (Stiglitz [1977]).

Désignons par $s$ la subvention reçue par chaque assuré à haut risque, qui se voit donc proposer un couple (couverture, prime) situé sur la droite $\Delta^2(s)$, d'équation :

$$P = p^2 q - s$$

L'équilibre financier de la compagnie impose alors que le contrat proposé aux bas risques se trouve sur la droite $\Delta^1\left(-\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)s\right)$, d'équation :

$$P = p^1 q + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)s$$

Pour un tel taux de subvention, le contrat optimal s'obtient facilement, par analogie avec les contrats équitables optimaux :

- $C^2(s)$ est situé à l'intersection de $\Delta^2(s)$ et de $q = L$ ;
- $C^1(s)$ est situé à l'intersection de $\Delta^1\left(-\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)s\right)$ et de la courbe d'indifférence des hauts risques passant par $C^2(s)$.

Représentons $C^2(s)$ sur un diagramme (couverture, prime) avec comme points de référence $C^1(0)$ et $C^2(0)$, soit le couple de contrats équitables optimaux. Soit $\overline{C}^1$ l'intersection de $U^2$, la courbe d'indifférence des hauts risques qui passe par $C^2(s)$ avec $U^1$, la courbe d'indifférence des bas risques qui passe par $C^1(0)$. Enfin, soit $\overline{\Delta}^1$ la droite de pente $p^1$ qui passe par $\overline{C}^1$ : elle intersecte $\Delta^2(s)$ en $C^* = (q^*, P^*)$. Il est alors immédiat que pour toute valeur de $\lambda$ telle que :

$$\lambda p^1 + (1-\lambda)\, p^2 \leqslant \frac{P^*}{q^*}$$

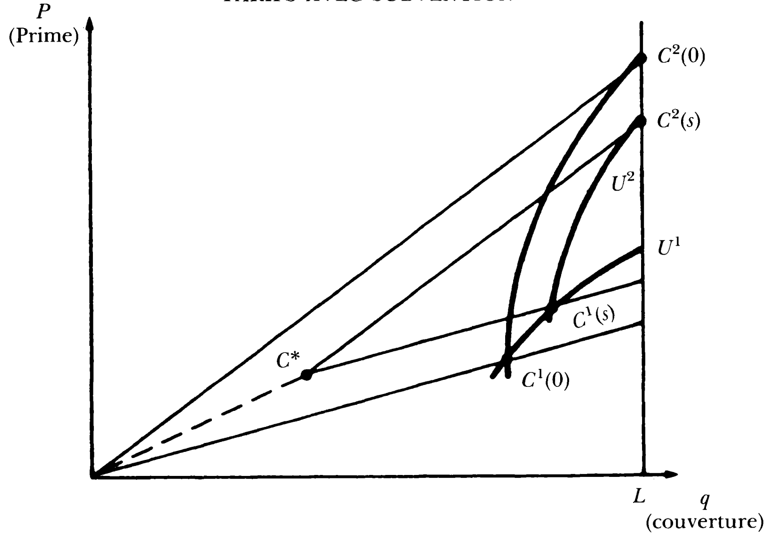
le couple $(C^1(s), C^2(s))$ domine au sens de Pareto le couple $(C^1(0), C^2(0))$.

En effet, pour une telle valeur de $\lambda$, $\Delta^1\left(-\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)s\right)$ va se trouver en-dessous de $\overline{\Delta}^1$ et $C^1(s)$ sera ainsi préféré par les bas risques au contrat $C^1(0)$. Comme il est clair que les hauts risques préfèrent $C^2(s)$ à $C^2(0)$, la démonstration est terminée. Il convient de remarquer que l'on a ainsi démontré que pour tout niveau $s$ de subvention des hauts risques il existe une valeur de $\lambda$ en-deçà de laquelle les bas risques augmentent leur utilité en accordant cette subvention. Cette propriété est légèrement plus forte que celle qui est énoncée dans la proposition 5.

La proposition 5 peut naturellement se généraliser d'une part au cas d'un nombre $N$ de types de risques, et d'autre part au cas d'un continuum de types. La proposition 6 donne une condition caractérisant les cas où le barême équitable optimal n'est pas Pareto dominé. Cette condition n'est pas immédiatement interprétable. Cependant l'intérêt de la proposition 6

FIGURE 4

TARIFS AVEC SUBVENTION




est de montrer qu'il existe des cas où tout barême équitable est Pareto dominé par un barême comportant des subventions. Ceci apporte une justification nouvelle à l'intervention de l'État dans la fixation des tarifs d'assurance. En effet, si l'on accepte l'idée selon laquelle la libre concurrence va tendre à instaurer des barêmes équitables de tarifs, il peut être désirable pour tous les assurés que l'État impose aux compagnies de procéder à un système bien choisi de subventions.

PROPOSITION 6 : *Soit* f(p) *la fonction de densité des types de risques sur l'intervalle* $[\underline{p}, \overline{p}]$. *Désignons par* $\widetilde{V}(\theta)$ *la solution de l'équation (10) qui correspond au tarif équitable optimal. Une condition nécessaire et suffisante pour que ce tarif engendre une situation Pareto optimale est la suivante :*

$$(*)\ \forall \theta \in [\overline{\theta}, \underline{\theta}]\, v'(\widetilde{V}(\theta) - \theta \widetilde{V}'(\theta))\, g(\theta) \leqslant \frac{d}{d\,\theta}[\theta g(\theta)\,(v'(\widetilde{V}'(\theta)) - v'(\widetilde{V}(\theta) - \theta\widetilde{V}'(\theta)))]$$

$$\text{où} \quad \underline{\theta} = \frac{\underline{p}}{1+p}, \quad \overline{\theta} = \frac{\overline{p}}{1+\overline{p}} \quad \text{et} \quad g(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^3}\, f\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right).$$

## ANNEXE

### *DÉMONSTRATIONS*

*Proposition 1 :*

Nous partons de la relation (7):

$$V(\theta) = \underset{F}{\text{Max}}\{\theta\, u(R-F-P(F)) + u(R-P(F))\}$$

Avec les changements de variable (8) et (9), ceci devient:

$$V(\theta) = \underset{y}{\text{Max}}\{\theta y + \psi(y)\} \tag{27}$$

Par conséquent $V(\theta)$ est une fonction convexe (comme supremum de fonctions linéaires); elle est donc presque partout différentiable et, en tout point de différentiabilité le maximum dans (27) est atteint en un seul point $y(\theta)$ avec:

$$V'(\theta) = y(\theta) \tag{28}$$

On en déduit facilement (11) ainsi que la relation:

$$\psi(y(\theta)) = V(\theta) - \theta V'(\theta) \tag{29}$$

La condition d'actuarialité (5) s'écrit alors:

$$\theta v(y) + v(\psi(y)) = \theta(R-L)+R$$

ce qui, par (28) et (29), donne exactement (10).

Réciproquement, si nous partons d'une fonction convexe $V$, solution du système (10), (11) on peut poser:

$$\psi(y) = \underset{\theta\in[\underline{\theta}\ \bar{\theta}]}{\text{Inf}} \{V(\theta) - \theta y\} \tag{30}$$

$\psi$ est une fonction concave (comme infimum de fonctions linéaires) et donc presque partout dérivable. Le théorème de dualité de Fenchel (cf. Rockafellar [1970] implique alors l'équation (27) avec de plus, en tout point de différentiabilité de la fonction $V$:

$$V'(\theta) = y(\theta)$$

et

$$\psi(y(\theta)) = V(\theta) - \theta V'(\theta)$$

Par conséquent, l'équation (10) implique immédiatement l'actuarialité du contrat correspondant à la fonction $\psi$.

*Proposition 2 :*

Soit $\psi$ une solution concave non triviale de l'équation (12). Posons:

$$V(\theta) = \underset{y}{\text{Max}}\{\theta y + \psi(y)\} = \theta y(\theta) + \psi(y(\theta))$$

$y(\theta)$ est caractérisé par la condition du premier ordre:

$$\psi'(y(\theta)) = -\theta$$

et l'équation (12) peut donc s'écrire:

$$\theta v(y(\theta)) + v(\psi(y(\theta))) = \theta\,(R-L) + R$$

ce qui est la condition d'actuarialité recherchée.

Réciproquement soit $F \rightarrow P(F)$ un tarif équitable et la fonction $V$ qui lui correspond par la proposition 1. Posons:

$$\psi(y) = \operatorname*{Inf}_{\theta\epsilon[\underline{\theta},\, \overline{\theta}]} \{V(\theta) - \theta y\} \tag{30}$$

En utilisant le théorème de dualité de Fenchel on obtient:

$$V(\theta) = \operatorname*{Max}_{y}\{\theta y + \psi(y)\} \tag{27}$$

ce qui implique que $z = \psi(y)$ est bien l'application associée par (8), (9) au tarif équitable $P$. Celui-ci étant supposé dérivable, $\psi$ l'est aussi. De plus (30) implique que $\psi$ est concave et le maximum dans (27) est donc atteint pour $y(\theta)$ tel que:

$$\psi'(y(\theta)) = -\theta$$

La condition d'actuarialité implique alors l'équation (12) pour tout $y$ de l'intervalle $[y(\underline{\theta}), y(\overline{\theta})]$.

*Proposition 3 :*

Les points a) et b) ont déjà été prouvés dans le corps du texte. Pour démontrer le point c) il suffit de dériver l'équation (12):

$$v'(\psi(y))\,\psi'(y) = (v(y)-R+L)\,\psi''(y) + v'(y)\,\psi'(y)$$

ou encore:

$$\psi''(y)\,(v(y)-R+L) = \psi'(y)\,[v'(\psi(y)) - v'(y)]$$

$v$ étant convexe, $v'$ est une fonction croissante. De plus, $v(y)$ est toujours supérieur à $(R-L)$ et $\psi'$ est négatif, donc $\psi''$ a le signe de $y-\psi(y)$: il est négatif sur $[0, y_0]$, et positif ensuite.

Considérons maintenant, pour une même valeur de $y$, deux valeurs distinctes du paramètre $y_0 < y_1$:

$$\int_{y_0}^{\psi_0(y)} \frac{ds}{R-v(s)} + \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{v(s)-R+L} = 0$$

$$\int_{y_1}^{\psi_1(y)} \frac{ds}{R-v(s)} + \int_{y_1}^{y} \frac{ds}{v(s)-R+L} = 0$$

Par différence on obtient:

$$\int_{\psi_0(y)}^{\psi_1(y)} \frac{ds}{R-v(s)} = \int_{y_0}^{y_1} ds \left[\frac{1}{R-v(s)} - \frac{1}{R-L-v(s)}\right]$$

Le second membre étant négatif, on en déduit:

$$\psi_0(y) > \psi_1(y).$$

*Proposition 6:*

Soit $F \to P(F)$ un tarif d'assurances et $\hat{F}(P)$ la franchise choisie par l'assuré de type $p$:

$$\hat{F} \text{ réalise } \max_{F}\{p\, u(R-F-P(F)) + (1-p)\, u(R-P(F))\}$$

Si l'on reprend les notations de l'équation (10), on a:

$$\theta = \frac{p}{1-p}$$

$$V(\theta) = \frac{p}{1-p} u(R-\hat{F}(p)-P(\hat{F}(p)) + u(R-P(\hat{F}(p)))$$

$$V'(\theta) = u(R-\hat{F}(p)-P(\hat{F}(p)))$$

Le tarif $F \to P(F)$ correspond à un système non déficitaire de subventions si et seulement si:

$$\int_{\underline{p}}^{\bar{p}} \{P(\hat{F}(p)) - p(L-\hat{F}(p))\} f(p)\, dp \geqslant 0 \tag{31}$$

or $R-\hat{F}(p) - P(\hat{F}(p)) = v(V'(\theta))$

$R - P(\hat{F}(p)) = v(V(\theta) - \theta V'(\theta))$

Donc la condition (31) peut s'écrire, après changement de variables:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \{R-v(V-\theta V')-\frac{\theta}{1+\theta}(L-v(V-\theta V')+v(V'))\} f\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \frac{d\theta}{(1+\theta)^2} \geqslant 0$$

ou encore:

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \{v(V-\theta V')+\theta v(V')-R-\theta(R-L)\}\, g(\theta)\, d\theta \leqslant 0 \tag{32}$$

où l'on a posé $\underline{\theta} = \frac{\underline{p}}{1-\underline{p}}$; $\bar{\theta} = \frac{\bar{p}}{1-\bar{p}}$; $g(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^3} f\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$

Il y a donc correspondance bi-univoque entre les tarifs d'assurance non déficitaires et les fonctions $V$ convexes qui vérifient :

$$V'(\theta) \in [0,\ 1]\ p.p.\ \text{sur}\ [\underline{\theta},\ \overline{\theta}] \tag{33}$$

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \{v(V-\theta V')+\theta v(V')-R-\theta(R-L)\}\ g(\theta)\ d\theta \leq 0 \tag{32}$$

Cet ensemble étant clairement convexe, tout optimum de Pareto peut être obtenu en maximisant une fonctionnelle linéaire croissante du type:

$$W = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \alpha(\theta)\ V(\theta)\ g(\theta)\ d\theta$$

sous les contraintes (32) et (33). Pour que le tarif équitable optimal, correspondant à la solution maximale $\widetilde{V}$ de (10), soit un optimum de Pareto il est donc nécessaire et suffisant qu'il existe une fonction intégrale positive $\alpha : [\underline{\theta}\ \overline{\theta}] \rightarrow R$ telle que $\widetilde{V}$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange du problème :

$$(P) \begin{cases} Max\ W = \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \alpha(\theta)\ V(\theta)\ g(\theta)\ d\theta \\ \text{sous les contraintes :} \\ V \text{ convexe} & (34) \\ V'(\theta) \in [0,\ 1] & (33) \\ \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \{v(V-\theta V') + \theta v(V') - R - \theta(R-L)\}\, g(\theta)\, d\theta \leq 0 & (32) \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\widetilde{V}$ est strictement convexe sur $[\underline{\theta},\ \overline{\theta}]$ avec $\widetilde{V}'(\overline{\theta}) < 1$ et $\widetilde{V}'(\underline{\theta}) > 0$ : les contraintes (33) et (34) ne jouent donc aucun rôle. Par contre (32) est nécessairement serrée : soit $\mu > 0$ le multiplicateur associé. Le hamiltonien de (8) s'écrit :

$$H = \alpha(\theta)\, V(\theta)\, g(\theta) + \mu\{v(V-\theta V') + \theta v(V') - R - \theta(R-L)\}\, g(\theta)$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$\frac{\partial H}{\partial V} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial H}{\partial V'}\right)$$

soit : $$g(\theta)[\alpha(\theta) + \mu v'(V-\theta V')] = \frac{d}{d\theta}\,[\mu\, \theta\, g(\theta)\, (v'(V') - v'(V-\theta V'))]$$

Pour que $\widetilde{V}$ vérifie cette équation il faut donc que:

$$\frac{\alpha(\theta)}{\mu} = -v'(\widetilde{V}-\theta\widetilde{V}') + \frac{1}{g(\theta)}\frac{d}{d\theta}[\theta g(\theta)\,(v'(\widetilde{V}')-v'(\widetilde{V}-\theta\widetilde{V}'))]$$

La condition (*) n'est autre que la positivité de $\alpha(\cdot)$.

## BIBLIOGRAPHIE

CRESTA, J.P. et J.J. LAFFONT [1982], « The Value of Statistical Information in Insurance Contracts », GREMAQ DP n° 8212, Université de Toulouse.

KOHLEPPEL, L. [1983], « Multidimensional Market Signalling », Universität Bonn DP n° 125.

HENRY, C. [1985], *Cours d'économie publique*, École Polytechnique, Paris.

MIYAZAKI, H. [1977], "The Rat Race and Internal Labor Market" *Bell Journal of Economies,* vol. 8, n° 2, 394-418.

QUINZII, M. et J.C. ROCHET [1985], « Multidimensional Signalling », École Polytechnique, DP A2771084, Paris.

RILEY, J.G. [1975], « Competitive Signalling », *Journal of Economic Theory,* 10, 174-186.

ROCKAFELLAR, R.T. [1970], *Convex Analysis,* Princeton University Press.

ROTHSCHILD, M. et J.E. STIGLITZ [1976], « Equilibrium in Competitive Insurance Markets », *Quarterly Journal of Economics* XI, 629-649.

SPENCE, A.M. [1974], « Competitive and Optimal Responses to Signals », *Journal of Economic Theory,* 296-332.

SPENCE, M. [1978], "Product Differentiation and Performance in Insurance Markets", *Journal of Public Economics,* vol. 10, n° 3, 427-448.

STIGLITZ, J.E. [1977], "Monopoly, Non-Linear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market", *Review of Economic Studies,* vol. XLIV (3), n° 138, 407-430.

WILSON, C. [1977], « A Model of Insurance Markets with Incomplete Information », *Journal of Economic Theory* 16, 167-207.