L'Actualité économique

Solution d’un système intersectoriel rectangulaire à coefficients variables. Démonstration de la convergence dans le calcul de la solution

C. Autin

Volume 48, numéro 1, avril–juin 1972

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1003685ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1003685ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cette note

Autin, C. (1972). Solution d’un système intersectoriel rectangulaire à coefficients variables. Démonstration de la convergence dans le calcul de la solution. *L'Actualité économique*, *48*(1), 176–180. https://doi.org/10.7202/1003685ar

*Solution d'un système intersectoriel rectangulaire à coefficients variables. Démonstration de la convergence dans le calcul de la solution**

Dans le système intersectoriel québécois[1], un vecteur de demande initiale exogène X_0 exprimé dans l'espace des secteurs productifs engendre une suite de flux de demande intermédiaire. À l'itération numéro un, on a : $R_1A_1X_0$ où A_1 est une matrice marginale (par rapport à l'itération) qui transforme X_0 en demande intermédiaire dans l'espace des biens et services, R_1 une matrice de répartition marginale qui achemine A_1X_0 vers les différents secteurs. Si R_k et A_k sont respectivement les matrices marginales de répartition et de production à l'itération k, la suite des demandes intermédiaires est :

$$R_1A_1X_0,\ R_2A_2R_1A_1X_0,\ ...,\ R_kA_k \dots R_2A_2R_1A_1X_0,\ ...$$

La solution pour X_0 donnée est la série :

$$X_0 + R_1A_1X_0 + R_2A_2R_1A_1X_0 + ...$$

que l'on peut encore écrire :

$$(I + R_1A_1 + R_2A_2R_1A_1 + ...)X_0$$

Nous étudierons la convergence de la série entre parenthèses. Posons $R_kA_k = D_k$. Le terme général G_k de la série est alors $G_k = D_kG_{k-1}$ pour $k \geqq 2$ et $G_1 = D_1$

* La démonstration n'utilise que des notions et théorèmes compris de la plupart des économistes non mathématiciens.

1. Voir : *Le système de comptabilité économique du Québec*, vol. 1, Bureau de la Statistique du Québec et Laboratoire d'économétrie, Université Laval, 1967.

Cherchons la limite de G_k quand k tend vers l'infini.

— *Voyons d'abord les propriétés des matrices* D_k

Soient :

$$R_k = [r_{ij}^{(k)}]_{n,m} \text{ et } A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{m,n}.$$

Les coefficients de ces matrices ont, par hypothèse, les propriétés suivantes :

$$0 \leq r_{ij}^{(k)} \leq 1 \text{ pour tout } i,j,k. \qquad (1)$$

$$0 \leq a_{ij}^{(k)} \leq 1 \text{ pour tout } i,j,k. \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{it}^{(k)} < 1 \text{ pour tout } t,k. \qquad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{m} a_{tj}^{(k)} < 1 \text{ pour tout } j,k. \qquad (4)$$

Proposition I. — S'il existe un nombre c tel que (3) et (4) peuvent être récrits comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n} r_{it}^{(k)} \leq c < 1 \text{ pour tout } t,k, \qquad (5)$$

$$\sum_{t=1}^{m} a_{tj}^{(k)} \leq c < 1 \text{ pour tout } j,k, \qquad (6)$$

alors la série $I + R_1A_1 + R_2A_2R_1A_1 + \ldots$ converge.

Proposition II. — Dans le cas du système québécois, un tel nombre c existe car le nombre de « colonnes de rechange » à partir desquelles on construit les R_k et A_k est fini. Il suffit de prendre c égal au maximum parmi les sommations des « colonnes de rechange ».

Soit :

$$D_k = [d_{ij}^{(k)}] = R_kA_k = \left[\sum_{t=1}^{m} r_{it}^{(k)}\, a_{tj}^{(k)}\right] \text{ pour tout } k. \qquad (7)$$

D'après (1) et (2) :

$$0 \leq r_{it}^{(k)}\, a_{tj}^{(k)} \leq 1 \text{ pour tout } i,j,k\,;$$

d'autre part, en vertu de (5) et (6) on a pour tout j,k :

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} r_{it}^{(k)}\, a_{tj}^{(k)} = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{it}^{(k)}\right) a_{tj}^{(k)} \qquad (9)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{(k)} \leqq \sum_{t=1}^{m} c a_{tj}^{(k)} = c \sum_{t=1}^{m} a_{tj}^{(k)} \leqq c^2 < 1 \; ; \tag{10}$$

les $d_{ij}^{(k)}$ étant, d'après (7) et (8), des sommes de termes non négatifs, (10) entraîne :

$$0 \leqq d_{ij}^{(k)} \leqq c^2 < 1 \text{ pour tout } i, j \text{ et } k. \tag{11}$$

Donc, les matrices D_k ont les mêmes propriétés que les matrices R_k et A_k, le nombre c^2 remplaçant c.

— *Examinons maintenant les matrices* G_k

Puisque $G_1 = [g_{ij}^{(1)}] = D_1 = [d_{ij}^{(1)}]$, en utilisant (10) et (11) nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(1)} \leqq c^2 < 1 \text{ pour tout } j. \tag{12}$$

$$0 \leqq g_{ij}^{(1)} \leqq c^2 < 1 \text{ pour tout } i,j. \tag{13}$$

Voyons ensuite :

$$G_2 = D_2 G_1 = \left[\sum_{t=1}^{m} d_{it}^{(2)} \, g_{tj}^{(1)} \right]. \tag{14}$$

Toute colonne j de G_2 donne :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} d_{it}^{(2)} \, g_{tj}^{(1)} = \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{it}^{(2)} \right) g_{tj}^{(1)}, \tag{15}$$

d'après (10) et (12) on a :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(2)} \leqq \sum_{t=1}^{m} c^2 g_{tj}^{(1)} = c^2 \sum_{t=1}^{m} g_{tj}^{(1)} \leqq c^2 c^2 = c^4 < 1 \; ; \tag{16}$$

les $g_{ij}^{(2)}$ étant d'après (14), (13) et (11) des sommes de termes non négatifs, (16) entraîne :

$$0 \leqq g_{ij}^{(2)} \leqq c^4 < 1 \text{ pour tout } i,j. \tag{17}$$

Il semble donc que les propriétés des G_k sont :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(k)} \leqq c^{2k} < 1 \text{ pour tout } j,k. \tag{18}$$

$$0 \leqq g_{ij}^{(k)} \leqq c^{2k} < 1 \text{ pour tout } i,j,k. \tag{19}$$

Montrons-le par récurrence :
1) Les propositions (18) et (19) sont vraies pour $k = 2$.
2) Admettons qu'elles soient vraies pour $k = s$ et montrons qu'elles sont vraies pour $k = s + 1$:
Soit :

$$G_{s+1} = [g_{ij}^{(s+1)}] = D_{s+1} G_s = \left[\sum_{t=1}^{m} d_{it}^{(s+1)} g_{tj}^{(s)} \right]; \qquad (20)$$

toute colonne j de G_{s+1} donne :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(s+1)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} d_{it}^{(s+1)} g_{tj}^{(s)} = \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{it}^{(s+1)} \right) g_{tj}^{(s)}, \qquad (21)$$

d'après (10) et l'hypothèse (2) nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}^{(s+1)} \leq c^2 c^{2s} = c^{2(s+1)} < 1 \text{ pour tout } j, \qquad (22)$$

de plus $g_{ij}^{(s+1)}$ étant la somme de termes non négatifs (22) entraîne :

$$0 \leq g_{ij}^{(s+1)} \leq c^{2(s+1)} < 1 \text{ pour tout } i,j. \qquad (23)$$

Les propositions sont donc vraies quel que soit k. Rappelons qu'une suite de matrices $G_k = [g_{ij}^{(k)}]$ converge vers une matrice $G = [g_{ij}]$ si et seulement si :

$$\lim_{k \to \infty} g_{ij}^{(k)} = g_{ij} \text{ pour tout } i \text{ et } j.$$

Si l'on observe (19), nous voyons que lorsque k augmente indéfiniment c^{2k} tend vers zéro, donc :

$$\lim_{k \to \infty} g_{ij}^{(k)} = 0$$

et *la suite* G_k *converge vers la matrice nulle de même ordre que les matrices* G_k.

— *Convergence de la série* $I + G_1 + G_2 + \ldots$

La série $I + G_1 + G_2 + \ldots$ converge si et seulement si les séries $g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} + \ldots + g_{ij}^{(k)} + \ldots$ (pour tout i et j) convergent. Or, un théorème nous dit que si deux séries $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ et $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ à termes positifs sont telles que $u_k \leq v_k$ pour tout k, alors la convergence de la série (v_k) entraîne la convergence de la série (u_k) et la somme de (v_k) est supérieure ou égale à la somme de (u_k). Nous sommes dans les conditions du théorème, avec la série $(g_{ij}^{(k)})$ à la place de (u_k) et (c^{2k}) à la place de (v_k).

Puisque (c^{2k}) est une progression géométrique de raison $c^2 < 1$, un résultat classique nous permet d'affirmer qu'elle converge et finalement nous pouvons affirmer que $(g_{ij}^{(k)})$ converge vers une limite $\leq \frac{c^2}{1-c^2}$ et $I + G_1 + G_2 + \ldots$ converge vers une matrice limite dont chaque élément est inférieur ou égal à : $1 + \frac{c^2}{1-c^2} = \frac{1}{1-c^2}$.

— *Cas où certains* $r_{ij}^{(k)}$ ou $a_{ij}^{(k)}$ sont négatifs

Il suffit alors que ces $r_{ij}^{(k)}$ et $a_{ij}^{(k)}$ aient des valeurs absolues telles que les conditions (1) à (4) soient respectées lorsqu'on remplace chaque coefficient par sa valeur absolue, pour que la série $(g_{ij}^{(k)})$ converge ; car en effet, si tous les coefficients sont exprimés en valeur absolue respectant les conditions mentionnées, les démonstrations qui précèdent sont valables et comme nous savons qu'une série absolument convergente est convergente, la série $(g_{ij}^{(k)})$ converge.

C. AUTIN,
Université Laval (Québec).