L'Actualité économique

La théorie de la commande et l'optimisation de systèmes économiques dynamiques

Alain Haurie

Volume 44, numéro 2, juillet–septembre 1968

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1002923ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1002923ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Haurie, A. (1968). La théorie de la commande et l'optimisation de systèmes économiques dynamiques. *L'Actualité économique*, *44*(2), 290–316. https://doi.org/10.7202/1002923ar

Analyse

La théorie de la commande et l'optimisation de systèmes économiques dynamiques

Notre propos est d'étudier quelques modèles simples de politique économique. Nous nous intéresserons moins aux aspects économiques[1] de ces modèles qu'à ceux, plus mathématiques, des techniques d'optimisation qui peuvent y être utilisées. La formalisation d'un modèle de politique économique devra bien représenter les mécanismes du contrôle économique et aussi permettre d'établir quantitativement la politique économique.

La théorie de la commande qui s'est considérablement développée à propos de la solution de problèmes de la technique industrielle, présente des méthodes d'optimisation de systèmes dynamiques qui peuvent être utilisées pour définir une politique économique quantitative. Pour illustrer ces méthodes nous utiliserons un modèle de stabilisation macro-économique simple, dû à Phillips, qui se présente ainsi[2] :

1. Pour une présentation de modèles de politique économique quantitative faite dans une optique beaucoup plus large nous renvoyons à L. Solari : « Structures économiques et modèles de politique économique quantitative », *Revue Suisse d'Économie Politique et de Statistique*, 1967, pp. 331-352.

2. A.W. Phillips, « Stabilization Policy in a Closed Economy », *Economic Journal*, vol. 64, 1954, pp. 290-324. « La cybernétique et le contrôle des systèmes économiques », *Cahiers de l'I.S.E.A.*, Série N, no 2, nov. 1958. Dans ce dernier article l'auteur étudie une version stochastique de ce problème que l'on peut présenter sous la forme simplifiée choisie par P. Whittle dans son ouvrage : *Prediction and Regulation by Linear Least Squares Methods*. English University Press, 1963.

$$z = c + g$$
$$c = ay + b + \varepsilon$$
$$\dot{y} = \lambda(z - y)$$

où a et b sont des coefficients fixés tandis que $\varepsilon = \varepsilon(t)$ représente une perturbation aléatoire. Du fait de cet aléa, y est aléatoire et le critère de performance choisi est :

$$I = E[(y - y_d)^2 + (g - g_d)^2]$$

ce qui est raisonnable si $\varepsilon(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire.

$$(1) \qquad \begin{aligned} z &= c + g \\ c &= (1-s)y \\ \dot{y} &= \lambda(z-y) \end{aligned}$$

	y	:	produit national
(2)	z	:	demande
	c	:	consommation
(3)	g	:	dépenses publiques
(4)	s	:	coefficient d'épargne
	λ	:	vitesse d'ajustement de l'offre à la demande.

$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps du produit national.

Les variables (2) et (3) sont fonctions du temps tandis que les coefficients (4) sont invariants. La variable g, (3), joue le rôle d'instrument de la politique économique. La détermination de la fonction g sur un certain horizon de temps se fera de façon à réaliser les objectifs définis. Nous considérerons deux types de politique de stabilisation.

La première n'est soumise à aucune contrainte et consiste à déterminer la fonction g de façon à rendre minimal l'indice de performance :

$$(5) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} [(y - y_d)^2 + (g - g_d)^2]dt$$

où y_d et g_d sont des évolutions « désirées » de y et g entre les dates fixées t_0 et t_1.

L'objectif est donc ici de stabiliser simultanément la production et les dépenses publiques.

La seconde est soumise à des contraintes du type

$$g_m \leq g \leq g_M$$

g_m et g_M étant des constantes fixées, et consiste à définir g compatible avec ces contraintes de façon à minimiser l'indice de performance

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (y - y_d)^2 dt$$

où y_d est un niveau de production désiré que nous considérerons constant entre t_0 et t_1.

On peut considérer aussi une troisième politique, de type mixte vérifiant

$$g_m \leq g \leq g_M$$

et rendant minimale l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [(y - y_d)^2 + (g - g_d)^2]dt$$

Ces problèmes entrent dans le cadre de la théorie de la commande (*control theory*). Les méthodes de cette théorie ont été d'abord dérivées du calcul des variations puis ont connu un développement propre grâce aux travaux de l'école de Pontryagin (principe du maximum) et de celle de Bellman (programmation dynamique).

Dans cet exposé nous aurons l'occasion de présenter les méthodes variationnelles et celle de Pontryagin.

Formulation générale du problème de la commande optimale

Soit un système dynamique ayant n variables d'état et p variables de contrôle que nous appellerons la commande du système.

En appelant $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ la suite des n variables d'état et $U = (u_1, u_2, ..., u_p)$ la suite des p variables de contrôle, l'évolution du système est définie par les équations différentielles

(8) $$\dot{x}_i = f_i(X, U, t) \qquad i = 1, ..., n$$

Le problème de la commande optimale consiste à déterminer les valeurs des variables de contrôle U de façon à ce que partant d'un état initial fixé

$$x_i(t_0) = x_i^0 \qquad i = 1, ..., n$$

le système évolue de façon à atteindre un état final

$$x_i(t_f) = x_i^f$$

en une date t_f qui n'est pas forcément spécifiée, tout en rendant minimal l'indice de performance

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t)dt$$

Des variantes de ce problème général seront obtenues si on suppose que :

— le système est conservatif, c'est-à-dire que le temps n'intervient pas explicitement dans les fonctions f_i ; $i = 1, ..., n$ et F.
— L'état final n'est pas fixé mais l'instant final est fixé.
— L'instant final n'est pas fixé mais l'état final est soumis à une contrainte ; par exemple, que ce soit un point d'une fonction du temps bien définie, c'est alors un problème de poursuite.
— La commande U peut être soumise à des contraintes diverses. On considérera qu'une commande est admissible si elle est représentée par une fonction continue par morceaux.

Les deux modèles de politique économique que nous avons définis sont exactement des problèmes de commande optimale ; nous verrons aussi que les différentes variantes du problème général sont des variantes possibles de nos modèles.

Détermination d'une politique de stabilisation optimale par la méthode de Lagrange

Le problème de Lagrange consiste à chercher le minimum de l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)\,dt$$

(où t_0 et t_1 sont fixés) pour l'ensemble des fonctions $x = x(t)$ deux fois dérivables et vérifiant les conditions aux limites

$$x(t_0) = x_0$$
$$x(t_1) = x_1$$

Il a été établi que si F est suffisamment régulière, la fonction $x = x(t)$ rendant extrémale cette intégrale doit vérifier nécessairement l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

appelée aussi équation d'Euler.

Nous pouvons ramener le problème de stabilisation économique à un problème de Lagrange si les valeurs initiale et finale du produit national sont données.

$$y(t_0) = y_0$$
$$y(t_1) = y_1$$

cela pourrait être, par exemple, les deux valeurs en t_0 et t_1 de y_d.

Par substitution on peut tirer du modèle (1) l'équation différentielle du mouvement de y :

On a

$$z = c + g = (1 - s)y + g$$

et donc

$$\dot{y} = \lambda(z - y) = \lambda g - \lambda s y$$

ce que nous écrirons

$$\dot{y} + \lambda s y = \lambda g \tag{9}$$

en portant l'expression de g suivant (9) dans l'expression (5) du critère de performance nous obtenons l'expression de I :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [(y - y_d)^2 + \frac{1}{\lambda^2}(\dot{y} + \lambda s y - \lambda g_d)^2]dt \tag{5'}$$

qui est de la forme :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(y, \dot{y}, t)\, dt$$

nous trouverons donc l'évolution optimale en résolvant l'équation d'Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

En calculant

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_d) + \frac{2s}{\lambda}(\dot{y} + \lambda s y - \lambda g_d)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{2}{\lambda^2}(\dot{y} + \lambda s y - \lambda g_d)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{2}{\lambda^2}(\ddot{y} + \lambda s \dot{y} - \lambda \dot{g}_d)$$

nous obtenons l'équation différentielle en y

$$\frac{1}{\lambda^2}\ddot{y} - y(1+s^2) = \frac{1}{\lambda}\dot{g}_d - sg_d - y_d \tag{10}$$

qui est linéaire du second ordre.
L'équation sans second membre

$$\frac{1}{\lambda^2}\ddot{y} - y(1+s^2) = 0$$

a pour solution générale :

$$y = Ae^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + Be^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t}$$

Dans le cas où les fonctions g_d et y_d sont constantes sur (t_0, t_1), nous obtenons facilement une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y = \frac{y_d + sg_d}{1+s^2}$$

et nous obtenons ainsi l'évolution optimale du produit national :

$$y = Ae^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + Be^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + \frac{y_d + sg_d}{1+s^2} \tag{10'}$$

Pour définir la politique de dépense du gouvernement, nous calculons :

$$\dot{y} = A\lambda\sqrt{1+s^2}e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} - B\lambda\sqrt{1+s^2}e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t}$$

et obtenons g en portant y et $\dot{y}$ dans (9)

$$g = A(s+\sqrt{1+s^2})e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + B(s-\sqrt{1+s^2})e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + \frac{sy_d + s^2g_d}{1+s^2}$$

Les constantes d'intégration sont facilement déterminées par les conditions

$$y(t_0) = y_0$$
$$y(t_1) = y_1$$

Nous pouvons considérer aussi le cas où l'évolution désirée est définie par

$$y_d = y_0e^{mt}$$
$$g_d = ky_d$$

il y a alors un taux de croissance m qui est considéré comme idéal ; on suppose : $t_0 = 0$.

Cherchons une solution particulière de (10) de la forme

$$y = Cy_0 e^{mt}$$

Pour que cette fonction vérifie l'équation (10) il faut que :

$$C = \lambda \frac{mk - \lambda(sk+1)}{m^2 - \lambda^2(1+s^2)} \tag{11}$$

L'évolution optimale du produit national est alors

$$y = Ae^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + Be^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + Cy_0 e^{mt}$$

et celle des dépenses publiques :

$$g = A(s + \sqrt{1+s^2})e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + B(s - \sqrt{1+s^2})e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + \left(\frac{m}{\lambda} + s\right)Cy_0 e^{mt}$$

les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiale et finale, C est donnée en (11).
Prenons comme condition finale

$$y(t_1) = y_d(t_1) = y_0 e^{mt_1}$$

Comme nous avons convenu que $t_0 = 0$; les constantes A et B vérifiront

$$\begin{cases} y_0(1-C) = A + B \\ y_0 e^{mt_1}(1-c) = Ae^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} + Be^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} A = \dfrac{y_0(1-c)[e^{mt_1} - e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1}]}{e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} - e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1}} \\ B = y_0(1-c) - A \end{cases}$$

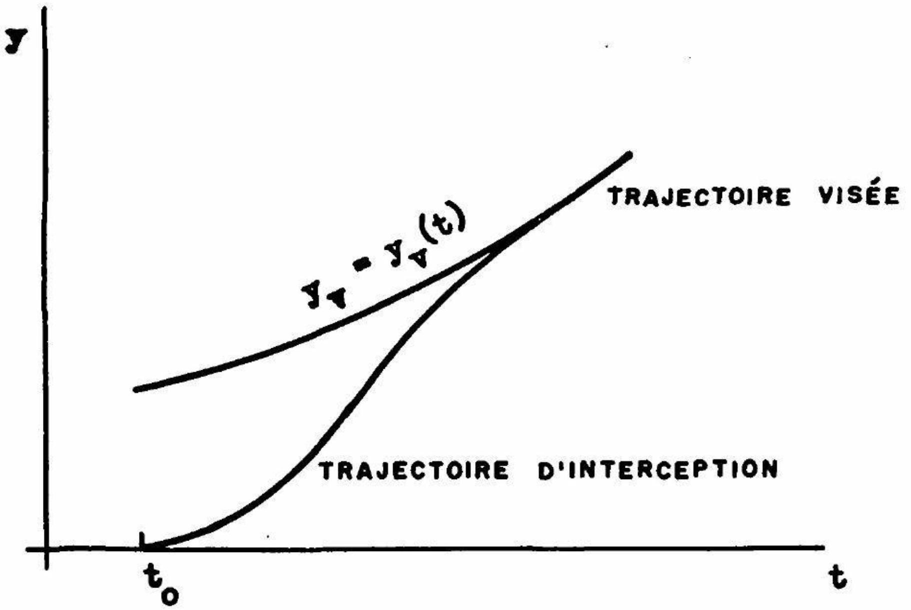
La fixation de l'état final : $y(t_1) = y_1$, est une contrainte très restrictive. Il sera possible d'atteindre une meilleure stabilisation en considérant une valeur finale libre. Le problème se complique un peu mais gagne en généralité.

La prise en considération d'un état final variable = Les conditions transversables

Jusqu'ici nous avons supposé que l'état initial et l'état final étaient spécifiés. Nous allons maintenant abandonner ces hypothèses et supposer que, dans un premier cas, la date finale t_1 étant spécifiée l'état final ne le soit pas, puis, dans un second cas, que la date finale t_f n'étant pas spécifiée on impose à $y(t_f)$ de se trouver sur la courbe :

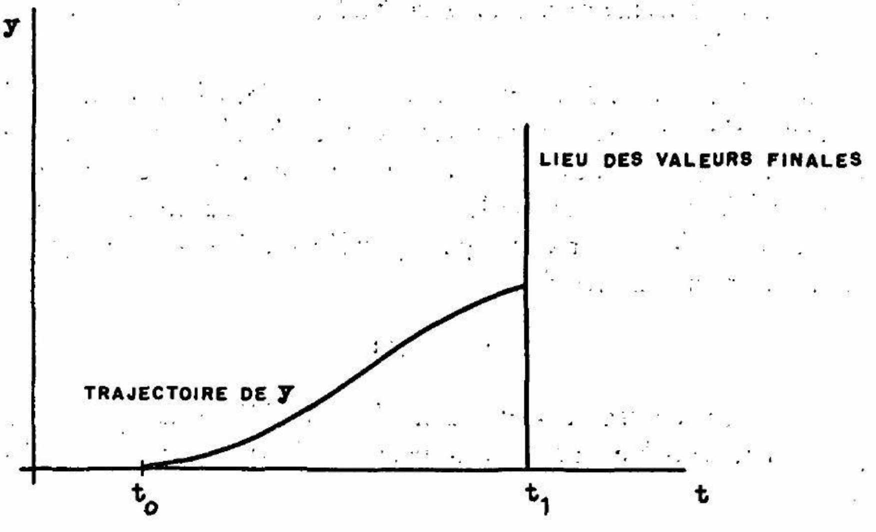
$$y_v = y_v(t)$$

Dans ce dernier cas il s'agit d'un problème de poursuite. y_v est une variable visée. Nous pouvons illustrer cette poursuite ainsi :



La politique de stabilisation doit minimiser l'indice de performance (5) mais on ne spécifie pas t_f, la date finale ; par contre on impose comme condition finale que y intercepte y_v.

Dans le premier cas on peut aussi illustrer l'évolution de y d'une façon analogue : Si la date t_1 est fixée mais $y(t_1)$ est libre la trajectoire de y se présentera ainsi :



Nous voyons qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre les deux problèmes ; dans les deux cas il s'agit d'établir une trajectoire optimale quand le point final se trouve sur une courbe spécifiée.

Quand le point final se trouve sur une courbe spécifiée nous obtenons la solution du problème en ajoutant aux équations d'Euler des conditions transversales. (Cf. annexe I).

Dans le cas d'une valeur finale libre à la date t_1 spécifiée, la condition transversale est

$$\frac{\partial F(y(t_1),\ \dot{y}(t_1),\ t_1)}{\partial \dot{y}} = 0$$

Dans le cas où la trajectoire visée n'est pas une parallèle [3] à l'axe des y et a une dérivée $\dot{y}_0(t)$, la condition transversale est :

$$F(y(t_f),\ \dot{y}(t_f),\ t_f) + [\dot{y}_0(t_f) - \dot{y}(t_f)]\,\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\,(y(t_f),\ \dot{y}(t_f),\ t_f) = 0$$

3. Édouard Goursat, *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier-Villars, 1956.

Valeur finale libre

Considérons, par exemple, les évolutions « idéales »

$$y_d = y_0 e^{mt}$$
$$g_d = k y_d$$

Si la date t_1 est fixée mais $y(t_1)$ est libre la politique de stabilisation optimale donne à y une évolution définie par :

$$y = A e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + B e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t} + C y_0 e^{mt}$$

C est la constante définie en (11) et A et B sont définies par la condition initiale

$$y(t_0) = y_0$$

et la condition transversale

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(y(t_f),\ \dot{y}(t_f),\ t_f) = 0$$

cette dernière condition s'explicite ainsi :

$$\frac{2}{\lambda^2}(\dot{y}(t_1) + \lambda s y(t_1) - \lambda k y_0 e^{mt_1}) = 0$$

En calculant $\dot{y}(t_1)$ et $y(t_1)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda k y_0 e^{mt_1} = {} & \lambda A(s + \sqrt{1+s^2}) e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} \\ & + \lambda B(s - \sqrt{1+s^2}) e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} \\ & + C y_0 e^{mt_1}(m + \lambda s) \end{aligned}$$

Ce qui définit A et B par :

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\lambda k - C(m+\lambda s))y_0 e^{mt_1} - y_0\lambda(1-C)(s - \sqrt{1+s^2})e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1}}{\lambda(s+\sqrt{1+s^2})e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1} - \lambda(s - \sqrt{1+s^2})e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_1}} \\ B = y_0(1-C) - A \end{cases}$$

Problème de poursuite

Supposons que la population P ait un taux de croissance a, et qu'elle soit à un niveau P_0 à la date initiale. Au cours du temps l'importance de la population évoluera suivant la fonction

$$P = P_0 e^{at}$$

Soit r_0 la valeur du produit national *per capita* à la date initiale $t_0 = 0$. Si l'objectif que nous nous fixons est d'atteindre une valeur du produit national *per capita* égale à $r_f > r_0$ à une date non spécifiée tout en stabilisant le système autour de y_d et g_d, nous avons défini un problème de poursuite. Nous appellerons y_v la fonction :

$$y_v = r_f P = r_f P_0 e^{at}$$

Notre problème est d'intercepter y_v tout en stabilisant y.

Comme le critère de performance est toujours le même, l'évolution optimale est une solution de l'équation d'Euler (10). Trois paramètres doivent être déterminés : A, B et t_f, date d'interception. Pour cela nous disposons de trois conditions :

la condition initiale : $y(t_0) = y_0$

la condition finale : $y(t_f) = y_v(t_f)$

et la condition transversale :

$$F(y(t_f), \dot{y}(t_f), t_f) = [\dot{y}(t_f) - \dot{y}_v(t_f)] \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} [y(t_f), \dot{y}(t_f), t_f)$$

Les deux premières conditions ont été explicitées à propos du cas où la valeur finale est fixée. Ici, la valeur finale est

$$y(t_f) = y_v(t_f) = r_f P_0 e^{at_f}$$

La date t_v doit être déterminée, nous disposons pour cela de la condition transversale.

En calculant :

$$\begin{aligned} - \quad F(y(t_f), \dot{y}(t_f), t_f) &= (r_f P_0 e^{at_f} - y_0 e^{mt_f})^2 \\ &+ [A(s + \sqrt{1+s^2}) e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} + B(s - \sqrt{1+s^2}) e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} \\ &+ y_0 e^{mt_f}(C(m + \lambda s) - \lambda k)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} (y(t_f), \dot{y}(t_f), t_f) &= \frac{2}{\lambda^2} [A(s + \sqrt{1+s^2}) e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} \\ & B(s - \sqrt{1+s^2}) e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} + y_0 e^{mt_f}(C(m + \lambda s) - \lambda k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \quad \dot{y}(t_f) &= A\lambda\sqrt{1+s^2} e^{(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} - B\lambda\sqrt{1+s^2} e^{-(\lambda\sqrt{1+s^2})t_f} \\ &+ C m y_0 e^{mt_f} \end{aligned}$$

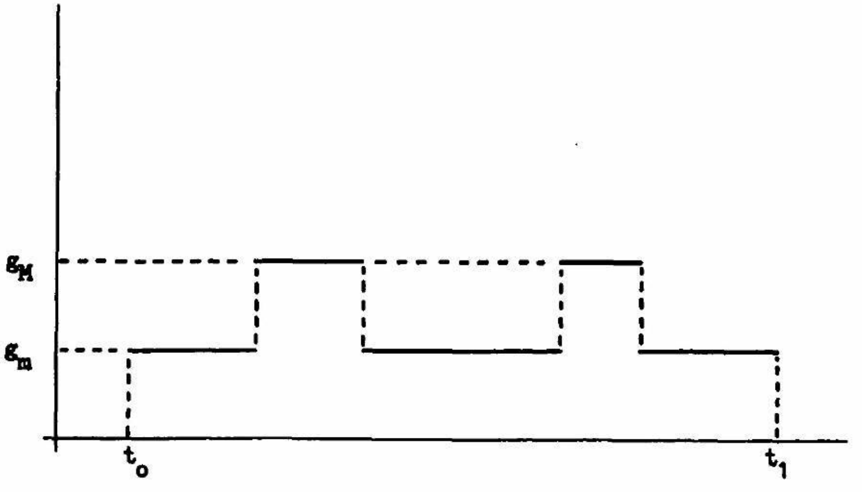
$$- \quad \dot{y}_v(t_f) = r_f P_0 a e^{at_f}$$

nous pouvons expliciter la condition transversale. La résolution des trois équations en A, B et t_f se fera par approximations successives.

Le principe de Pontryagin : une méthode générale de la théorie de la commande

Commande bornée et non stabilisée. Système conservatif

Dans la formulation générale d'un problème de commande optimale nous avons considéré comme commande admissible des fonctions continues par morceaux. Supposons qu'il soit possible pour la dépense gouvernementale d'avoir des discontinuités sous forme de sauts ; par exemple, une commande admissible serait celle où $g = g(t)$ prend deux valeurs seulement g_m et g_M.



Les points de discontinuité de g, dans ce cas, seront appelés les points de commutation de la commande.

Dans le modèle de stabilisation que nous venons d'étudier, aucune contrainte ne venait lier la commande g. On évitait cependant des évolutions « impossibles » de g en faisant figurer cette variable dans le critère de performance ; on stabilisait alors simultanément la production et les dépenses publiques.

Une autre approche peut être envisagée. Supposons que l'on ne puisse admettre pour valeurs de g que celles qui sont comprises entre deux bornes, l'une inférieure, g_m, l'autre supérieure, g_M.

Supposons alors que l'objectif soit de stabiliser la production autour d'un niveau constant y_d sur l'intervalle de temps (t_0, t_1). (Système conservatif). Le problème se formulera ainsi :

Étant donné le système dynamique

$$\dot{y} = -\lambda s y + \lambda g$$

déterminer la commande g, soumise aux contraintes

$$g_m \leqq g \leqq g_M$$

rendant minimale l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (y - y_d)^2 dt$$

les dates t_0 et t_1 étant fixées, à l'instant t_0 la valeur initiale de y étant

$$y(t_0) = y_0$$

cependant qu'à l'instant t_1 la valeur finale est libre.

Du fait des contraintes auxquelles est soumise g, la méthode de Lagrange ne peut plus être employée aussi directement. Il est vraisemblable que la commande optimale comportera des points de commutation entre g_m et g_M. Il n'est donc pas possible d'obtenir g comme solution d'une équation différentielle (équation d'Euler). La méthode la plus élégante pour résoudre ce problème est celle qui utilise le « principe du maximum » de Pontryagin.

Cette méthode [4] est basée sur la considération d'un système dynamique « adjoint » à celui que l'on étudie, le principe du maximum étant de maximiser une certaine fonction, l'hamiltonien [5], construite à l'aide du système initial et de son adjoint. Nous présentons en annexe 2 une démonstration, dans un cas particulier, de ce principe ; nous donnerons ici les étapes de la résolution du problème de la commande optimale suivant cette méthode.

(i) Pour utiliser le principe de Pontryagin il est nécessaire de transformer le critère intégral en critère final.

Soit le système dynamique, conservatif

i.1 $$\dot{x}_i = f_i(X,\ U) \qquad i = 1,\ \dots,\ n$$

et le critère intégral

i.2 $$I = \int_{t_0}^{t_1} F(X,\ U)\,dt$$

---

4. Cf. L.S. Pontryagin et alii, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, traduction anglaise, Interscience, 1962.

5. Le nom d'hamiltonien provient du fait que les variables du système initial, celles du système adjoint et l'hamiltonien vérifient les équations de Hamilton. Cf. note 6.

on transforme ce critère intégral en critère final en considérant une variable supplémentaire dans le système, x_{n+1} définie par :

i.3 $$\dot{x}_{n+1} = F(X,\ U)\ ;$$

rendre minimale l'intégrale I revient à rendre minimale la valeur finale

i.4 $$x_{n+1}(t_1)$$

(ii) Nous considérons le système différentiel adjoint

ii.1 $$\psi_j = -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \psi_i\ ; \qquad j = 1,\ \dots,\ n+1$$

et la fonction « hamiltonienne » [6]

ii.2 $$H = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \psi_i = H(X,\ \psi,\ U)$$

(iii) Le principe de Pontryagin s'énonce ainsi : « Pour que la commande U^* soit optimale, quand l'état initial est fixé et l'état final est libre, il faut qu'il existe une suite de fonctions $\psi_i(t)$; $i = 1 \dots n+1$ vérifiant le système adjoint (ii : 1) et telles que :

iii.1 L'hamiltonien H atteigne son maximum pour $U = U^*$ en tout point t, $t_0 \leqq t \leqq t_1$;

iii.2 en t_1 ces fonctions vérifient les conditions :

$$\psi_i(t_1) = 0\ ; \qquad i = 1,\ \dots,\ n$$
$$\psi_{n+1}(t_1) = -1$$

La commande optimale U^* maximise donc $H(X,\ \psi,\ U)$, ce qui définit U^* en fonction de X et ψ. Nous disposons pour définir X et ψ des systèmes différentiels (i.1), (i.3) et (ii.1), munis des conditions initiales

$$X(t_0) = X_0$$

et finales

$$\psi(t_1) = (0,\ 0,\ \dots,\ -1)$$

6. Le nom d'hamiltonien donné à la fonction H est justifié par le fait que les fonctions ψ_i et x_i peuvent être déduites de H suivant le système canonique

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}\ ; \qquad \psi_i = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}$$

comme en mécanique sous le nom d'équations de Hamilton.

Appliquons donc ce principe à notre modèle économique. Le système différentiel considéré est

$$\dot{y}_1 = -\lambda s y_1 + \lambda g$$
$$\dot{y}_2 = (y_1 - y_d)^2$$

les conditions initiales sont

$$y_1(t_0) = y_0$$
$$y_2(t_0) = 0$$

le système différentiel adjoint est :

$$\dot{\psi}_1 = \lambda s \psi_1 - 2(y_1 - y_d)\psi_2$$
$$\dot{\psi}_2 = 0$$

les conditions finales sont :

$$\psi_1(t_1) = 0 \, ; \qquad \psi_2(t_1) = -1$$

la fonction « hamiltonienne » est :

$$H = (-\lambda s y_1 + \lambda g)\psi_1 + (y_1 - y_d)^2 \psi_2$$

La commande est représentée par g qui est soumise aux contraintes

$$g_m \leqq g \leqq g_M$$

la commande optimale rendra H maximale ; comme λ est positif, si ψ_1 est positif on aura H maximal pour $g^* = g_M$; si ψ_1 est négatif, par contre, H atteindra son maximum pour $g^* = g_m$. Il est alors commode de changer quelque peu les notations : nous définirons

$$g_d = \frac{g_m + g_M}{2} \, ; \qquad g = g_d + u$$

et nous traduirons les contraintes par

$$|u| \leqq M \, ; \qquad M = g_M - g_d = |g_m - g_d|$$

Nous voyons donc que

$$\psi_1 \geqq 0 \rightarrow u^* = M$$
$$\psi_1 < 0 \rightarrow u^* = M$$

Nous traduirons cela par l'expression

$$u^* = M\mathrm{Sign}[\psi_1]$$

u^* est ainsi définie en fonction de ψ_1, nous pouvons porter cette expression dans l'équation différentielle en y qui devient alors :

$$\dot{y}_1 = -\lambda s y_1 + \lambda(g_d + M\mathrm{Sign}[\psi_1])$$

ψ_1 sera déterminée par le système adjoint

$$\dot{\psi}_1 = \lambda s \psi_1 - 2(y_1 - y_d)\psi_2$$
$$\dot{\psi}_2 = 0$$

les conditions finales et cette dernière équation impliquent :

$$\psi_2 = C^{te} = -1$$

Les fonctions y_1 et ψ_1 seront donc déterminées par les deux équations

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\lambda s y_1 + \lambda(g_d + M\mathrm{Sign}[\psi_1]) \\ \dot{\psi}_1 = \lambda s \psi_1 + 2(y_1 - y_d) \end{cases}$$

et les conditions

$$y_1(t_0) = y_0 \qquad \psi_1(t_1) = 0$$

la résolution de ce système va être délicate car il n'est pas linéaire et les conditions sont données aux deux points limites de la trajectoire. Il n'y a pas de méthode générale de résolution d'un tel système.

Nous pouvons cependant faire une remarque importante : la commande optimale g^* ne prendra que les deux valeurs limites g_m et g_M et commutera un certain nombre de fois de l'une à l'autre. Ce résultat est assez intuitif mais la détermination des points de commutation est difficile. La méthode de Pontryagin définit, dans ce problème, les points de commutation comme ceux de changement de signe de ψ_1.

Si nous disposions de la valeur initiale $\psi_1(t_0)$ nous pourrions commander le système à l'aide des deux équations différentielles. Le signe de $\psi_1(t_0)$ déterminerait la commande initiale, donc l'évolution de y_1 et ψ_1 ; dès que ψ_1 changerait de signe on commuterait la commande, ce qui définirait une nouvelle évolution de y_1 et de ψ_1 etc. La valeur initiale $\psi_1(t_0)$ doit être telle qu'à la date finale la condition $\psi_1(t_1) = 0$ soit vérifiée. La détermination de $\psi_1(t_0)$ est un problème difficile qu'on peut résoudre par approximations successives.

Quand ψ_1 est positif le mouvement de y est défini par l'équation différentielle :

$$\dot{y} + \lambda s y = \lambda(g_d + M) = \lambda g_M$$

dont la solution générale est :

a) $$y = Ae^{-\lambda st} + \frac{g_M}{s}$$

A étant déterminée par la condition initiale.

Si ψ_1 est négatif le mouvement de y est :

b) $$y = A'e^{-\lambda st} + \frac{g_m}{s}$$

Il y aura donc une alternance d'évolutions de type (a) ou (b) dans le mouvement de y.

Commande bornée et stabilisée

Considérons en dernier lieu une commande soumise aux contraintes

$$g_m \leqq g \leqq g_M$$

et un critère de performance

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [(y - y_d)^2 + (g - g_d)^2]dt$$

où y_d et g_d sont des constantes sur (t_0, t_1). Le système différentiel initial est :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\lambda s y_1 + \lambda g \\ \dot{y}_2 = (y_1 - y_d)^2 + (g - g_d)^2 \end{cases}$$

Les conditions initiales sont :

$$y_1(t_0) = y_0$$
$$y_2(t_0) = 0$$

Le système différentiel adjoint est :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \lambda s \psi_1 - 2(y_1 - y_d)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \end{cases}$$

avec les conditions finales : $\psi_1(t_1) = 0$; $\psi_2(t_1) = -1$. La fonction « hamiltonienne » est :

$$H = (-\lambda s y_1 + \lambda g)\psi_1 + [(y_1 - y_d)^2 + (g - g_d)^2]\psi_2$$

La commande optimale devra maximiser H en respectant les contraintes. En ne considérant dans H que les termes contenant g nous avons la fonction,

$$G = \lambda\psi_1 g + (g - g_d)^2 \psi_2$$

comme $\psi_2 = -1$, on a :

$$G = \lambda\psi_1 g - (g - g_d)^2$$

posons encore

$$g = g_d + u\,; \qquad |u| \leq M$$

ce qui nous donne, en fonction de u

$$G = \lambda\psi_1 (g_d + u) - u^2$$

et H sera maximale si G l'est.

$$\frac{dG}{du} = \lambda\psi_1 - 2u$$

donc si

$$|\lambda\psi_1| \leq 2M$$

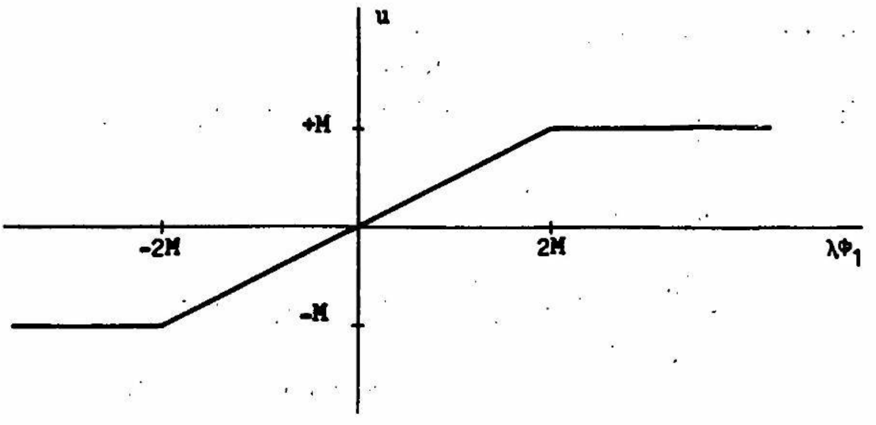
la commande optimale est

$$u^* = \frac{\lambda\psi_1}{2}$$

par contre, si $|\lambda\psi_1| > 2M$, il n'y a pas de maximum pour u entre $-M$ et M, et u^2 étant toujours positif le maximum de V aura lieu en

$$u^* = M\text{Sign}[\lambda\psi_1] = M\text{Sign}[\psi_1]$$

Nous avons donc le graphe suivant décrivant la commande.



Quand la commande n'est pas saturée, $|u^*| < M$ le mouvement de y_1 et ψ_1 est défini par les deux équations :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\lambda s y_1 + \dfrac{\lambda^2}{2}\psi_1 + \lambda g_d \\ \dot{\psi}_1 = 2y_1 + \lambda s \psi_1 - 2y_d \end{cases}$$

par addition nous éliminerons ψ_1

$$\lambda\dot{\psi}_1 - 2s\dot{y}_1 = 2\lambda(1+s^2)y_1 - 2\lambda y_d - 2\lambda s g_d$$

en dérivant la première équation nous obtenons

$$\ddot{y}_1 = -\lambda s\dot{y}_1 + \frac{\lambda^2}{2}\dot{\psi}_1$$

et donc en portant l'expression de $\dot{\psi}_1$

$$\ddot{y}_1 = -\lambda s\dot{y}_1 + \lambda s\dot{y}_1 + \lambda^2(1+s^2)y_1 - \lambda^2(y_d + s g_d)$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{y}_1 = \lambda^2(1+s^2)y_1 - \lambda^2(y_d + s g_d)$$

Ce qui est très exactement l'équation du mouvement de y obtenue en (10). L'évolution de y est alors celle définie en (10′). Par contre quand la commande est saturée l'évolution de y_1 est du type (a) ou (b) définis dans le cas précédent. Le choix des constantes d'intégration devra se faire de façon à respecter la condition initiale

$$y_1(t_0) = y_0$$

et la condition finale

$$\psi_1(t_1) = 0$$

Ici encore, le problème sera résolu quand on aura défini la valeur initiale

$$\psi_1(t_0)$$

cette valeur initiale et la condition initiale

$$y_1(0) = y_0$$

déterminent l'évolution de y_1 et de ψ_1 tant que ψ_1 demeure dans une des 3 régions

$-\infty < \psi_1 < -\dfrac{2M}{\lambda}$ évolution du type (b)

$-\dfrac{2M}{\lambda} \leq \psi_1 \leq \dfrac{2M}{\lambda}$ évolution du type (10′)

$\dfrac{2M}{\lambda} < \psi_1 < \infty$ évolution du type (a)

Dès que ψ_1 passe d'une région à une autre, la commande est changée et on change de type d'évolution ; les constantes d'intégration sont toujours déterminées par les conditions initiales, et ainsi de suite jusqu'à l'instant final t_1 où la condition finale $\psi_1(t_1) = 0$ doit être vérifiée.

En guise de conclusion

Après avoir exposé, en nous basant sur le modèle de Phillips, quelques méthodes de la théorie de la commande, nous laisserons le lecteur sur sa faim, quant à l'interprétation économique des résultats. Notre but n'était que de montrer comment un modèle économique dynamique pouvait être rendu optimal. Nous avons eu l'occasion d'exposer les méthodes suivantes.

1) La méthode de Lagrange sous trois variantes
   I. État initial fixé.
      Date finale fixée.
      État final fixé.
   II. État initial fixé.
      Date finale fixée.
      État final libre.
   III. État initial fixé.
      Date finale libre.
      État final sur une courbe fixée.

2) La méthode de Pontryagin dans le cas unique (II)

Dans l'œuvre de Pontryagin les deux autres variantes (I) et (III) sont traitées par une méthode basée sur le principe du maximum. Cette méthode est plus générale que celle de Lagrange et permet de traiter des problèmes où la commande optimale est continue par morceaux. Une version discrète de ce principe existe permettant d'optimiser des systèmes aux différences finies. Cette méthode s'étend aussi à des systèmes non conservatifs.

Nous n'avons pas, et de loin, épuisé le sujet. Aucune de ces méthodes n'est adaptée à l'optimisation d'un système stochastique. La méthode la plus intéressante est alors celle de la programmation dynamique.

Alain HAURIE,
professeur à l'École des Hautes Études commerciales (Montréal).

ANNEXES

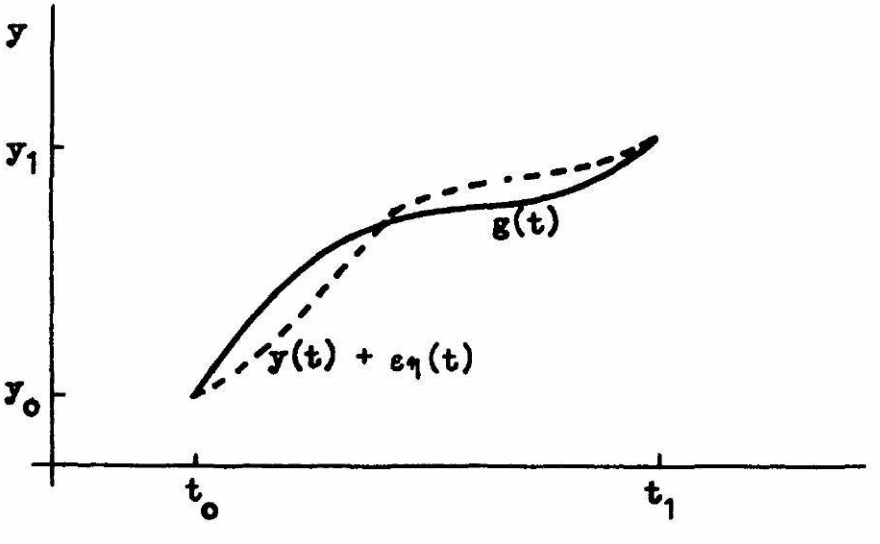
1) *L'équation d'Euler et les conditions transversales*

Nous cherchons le minimum de l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(y, \dot{y}, t)\,dt$$

quand t_0 et t_1 sont fixés ainsi que les valeurs initiale et finale :

$$y(t_0) = y_0 \; ; \qquad y(t_1) = y_1$$



Considérons une fonction $\eta(t)$ vérifiant

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$$

et ε un infiniment petit.

Si I est minimale pour $y = y(t)$ alors en remplaçant $y(t)$ par $y(t) + \varepsilon\eta(t)$ et en faisant tendre ε vers 0 nous devons obtenir.

$$\left[\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Or

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F(y + \varepsilon\eta,\ \dot{y} + \varepsilon\dot{\eta},\ t)\,dt$$

donc

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\eta} \right] dt$$

nous pouvons intégrer par partie le second terme et obtenir

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta - \eta\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta \right]_{t_0}^{t_1}$$

mais comme $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, le dernier terme s'annule et donc :

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right] \eta dt$$

cette dérivée doit s'annuler quel que soit η pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire pour $y(t)$. Nous obtenons donc la condition nécessaire :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

qui est l'équation d'Euler.

Les notations variationnelles nous éviteront de faire intervenir ε. On appelle variation de y, la fonction :

$$\delta y = \varepsilon\eta$$

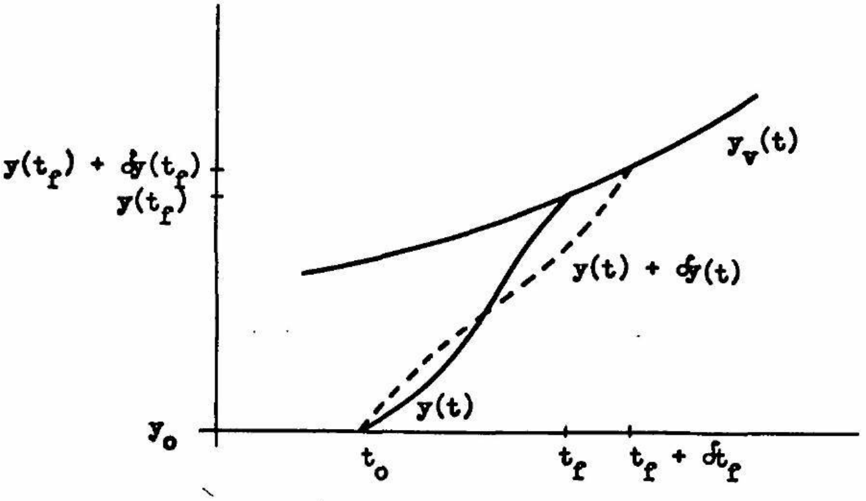
et variation de $\dot{y}$ la fonction

$$\delta\dot{y} = \varepsilon\dot{\eta} = \frac{d}{dt}\partial y$$

Considérons maintenant le cas où la valeur finale $y(t_f)$ se trouve sur une courbe spécifiée

$$y_v = y_v(t)$$

La variation que nous devons considérer devra être nulle à l'instant final mais non à l'instant final où elle devra se faire le long de $y_v(t)$.



Considérons la variation élémentaire de I quand y varie de δy, $y(t_f)$ de $\delta y(t_f)$ et t_f de δt_f.

$$\partial I = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt + \Big[F \delta t \Big]_{t=t_f}$$

en intégrant par partie de deuxième terme de l'intégrale nous obtenons :

$$\partial I = \int_{t_0}^{t_f} \partial y \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) dt - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta y \right]_{t_0}^{t_f} + \Big[F \delta t \Big]_{t=t_f}$$

Comme $[\delta y]_{t=t_0} = 0$ nous avons :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta y \right]_{t_0}^{t_f} + \Big[F \delta t \Big]_{t=t_f} = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta y + F \delta t \right]_{t=t}$$

Si $y = y(t)$ entre t_0 et t_f rend minimale I nous devons avoir $\delta I = 0$ et donc les conditions nécessaires.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot y} = 0 \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial \dot y}\,\delta y + F\delta t\right]_{t=t_f} = 0 \end{cases}$$

Si la courbe d'équation

$$y_v = y_v(t)$$

est parallèle à l'axe des y, alors t_f est fixé et $\delta t_f = 0$; les conditions nécessaires sont alors,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot y} = 0 \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial y}\right]_{t=t_f} = 0 \end{cases}$$

Si la courbe spécifiée possède une dérivée $\dot y_v(t)$, les variations $\delta y(t_f)$ et δt_f devant être telles que le point final reste sur la courbe $y_v(t)$ nous devons avoir :

$$y(t_f + \delta t_f) + \delta y(t_f) = y_v(t_f + \delta t_f)$$

et puisque

$$y_v(t_f + \delta t_f) \simeq \dot y_v(t_f)\delta t_f$$

et que

$$y(t_f + \delta t_f) \simeq \dot y(t_f)\delta t_f$$

nous obtenons

$$\delta y(t_f) \simeq [\dot y_v(t_f) - \dot y(t_f)]\delta t_f$$

ce qui nous permet d'énoncer les conditions nécessaires

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot y} = 0 \\ \left[F + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,[y_v - \dot y]\right]_{t=t_f} = 0 \end{cases}$$

2) *Une démonstration du principe de Pontryagin dans un cas particulier*

Nous considérons un système dynamique du type de celui que nous avons dans notre modèle :

$$\begin{cases} x_1 = ax_1 + bu & = f_1(x_1,\ u) \\ x_2 = \varphi(x_1,\ u) & = f_2(x_1,\ u) \end{cases}$$

u est la commande qui est soumise aux contraintes

$$|u| \leqq 1$$

et que l'on veut déterminer de façon à rendre minimale la fonction de l'état final

$$P = x_2(t_1)\ ; \qquad t_1 \text{ fixé}$$

étant donné l'état initial

$$x_1(t_0) = x_0\ ; \qquad x_2(t_0) = 0$$

— Nous considérerons le système différentiel adjoint :

$$\begin{cases} \psi_1 = -\psi_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = -a\psi_1 - \psi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \\ \\ \psi_2 = -\psi_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

et les conditions finales

$$\psi_1(t_1) = 0\ ; \qquad \psi_2(t_1) = -1$$

— La fonction « hamiltonienne » est :

$$H = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 = (ax_1 + bu)\psi_1 + \varphi(x_1,\ u)\psi_2$$

— Pour établir la condition nécessaire nous allons considérer des variations de la variable d'état et de celle de commande, en déduire une variation correspondante de P et montrer alors que si H n'est pas maximale relativement à u il est possible de trouver une commande réduisant la valeur P.

Soient δx_1 et δx_2 deux variations des variables d'état vérifiant les conditions initiales [1]

$$\delta x_1(t_0) = \delta x_2(t_0) = 0$$

1. Ces conditions sont raisonnables puisque toutes les trajectoires du système doivent avoir la même origine.

La variation de P correspondante est

$$\delta P = \delta x_2(t_1)$$

comme

$$\psi_1(t_1) = 0\,; \qquad \psi_2(t_1) = -1$$

et

$$\delta x_1(t_0) = 0\,; \qquad \delta x_2(t_0) = 0$$

on peut aussi écrire

$$\delta P = -\Big[\psi_1 \delta x_1 + \psi_2 \delta x_2\Big]_{t_0}^{t_1}$$

ou bien aussi :

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big[\psi_1 \delta x_1 + \psi_2 \delta x_2\Big] dt$$

c'est-à-dire

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\psi_1 \delta \dot{x}_1 + \psi_2 \delta \dot{x}_2 + \dot{\psi}_1 \delta x_1 + \dot{\psi}_2 \delta x_2\Big] dt$$

$\delta \dot{x}_1$ est la variation de f_1 correspondant aux variations δx_1, δx_2, δu ; on a donc :

$$\delta \dot{x}_1 = f_1(x_1 + \delta x_1,\ u + \delta u) - f(x_1,\ u)$$
$$\delta \dot{x}_1 \simeq a \delta x_1 + b \delta u$$

et de la même façon

$$\delta \dot{x}_2 \simeq \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, \delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, \delta u$$

D'autre part, le système adjoint définit $\dot{\psi}_1$ et $\dot{\psi}_2$ nous avons donc

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\psi_1(a\delta x_1 + b\delta u) + \psi_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\delta u\right) - \left(a\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)\delta x_1\Big] dt$$

donc

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_1} \left[b\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right] \delta u$$

P est minimale si toute variation δu possible entraîne $\delta P > 0$. Or, considérons l'expression

$$H(x_1, x_2, u + \delta u) - H(x_1, x_2, u) \simeq$$

$$b\psi_1 \delta u + \psi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta u$$

nous voyons que l'on a :

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_1} [H(x_1, x_2, u + \delta u) - H(x_1, x_2, u)] \delta u$$

et donc P est minimale si toute variation δu possible entraîne $\delta P > 0$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$H(x_1, x_2, u)$$

est maximale par rapport à u.

La condition est ici nécessaire et suffisante. Cela tient au fait que le système commandé est linéaire. Dans le cas général, une démonstration analogue établirait la condition nécessaire.

2. J.T. Tou : *Modern Control Theory*, McGraw-Hill, 1964.