L'Actualité économique

Une approche de mathématiques économiques, réflexions sur des travaux récents d'économie régionale

Victor Rouquet La Garrigue

Volume 42, numéro 1, avril–juin 1966

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1003207ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1003207ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Rouquet La Garrigue, V. (1966). Une approche de mathématiques économiques, réflexions sur des travaux récents d'économie régionale. *L'Actualité économique*, *42*(1), 114–133. https://doi.org/10.7202/1003207ar

Analyse

Une approche de mathématiques économiques. réflexions sur des travaux récents d'économie régionale

Au niveau de l'analyse strictement scientifique et suivant des optiques homologues de celles qui prévalent en matière d'échanges interdisciplinaires, l'Institut de Science Économique Appliquée a présenté une série d'études qui peuvent apparaître, à première vue, comme une réalisation de l'idée de travail « inter-groupes » [1].

Féconde et puissante, la coopération de compétences variées se résume, néanmoins, dans la publication de ces *Cahiers,* à l'examen attentif d'une œuvre qui constitue une brillante symbiose que, seul, M. J.-R. Boudeville a su traduire avec un rare bonheur et à l'occasion d'une analyse dont la clarté et la précision — moins complémentaires qu'on ne le pense généralement — se signalent dès la première lecture.

L'appareil mathématique utilisé — qui est davantage qu'une terminologie savante — donne, ici, la preuve de la plénitude d'un activisme suffisamment puissant pour tirer les travaux de régionalisme et d'économie géographique des sentiers relativement neufs mais relativement battus par la densité d'une littérature désarçonnante par sa nature superficielle.

---

1. Consulter les *Cahiers de l'Institut de Science Économique Appliquée*, série « Économie régionale », et, en particulier, les travaux de J.-R. Boudeville.

Au-delà des simples mesures de leur objet, les instruments d'analyse de l'auteur offrent au lecteur et au spécialiste d'économie régionale, les moyens sûrs d'une formalisation et de multiples possibilités de progression dans un domaine, certes, déjà largement exploré, mais insuffisamment marqué par une imprégnation mathématique, seule capable de rationaliser les recherches et seule nécessaire aux critères de la recherche scientifique et de l'innovation.

Soucieux d'habituer le lecteur à la rigueur du raisonnement, M. J.-R. Boudeville a eu la préoccupation fondamentale de rédiger des travaux faisant aussi souvent appel à l'intuition qu'aux ressources de quelques techniques mathématiques ayant donné, dans d'autres directions de travail, le témoignage irréfutable de leur efficacité.

L'intérêt de l'étude qui suit est de faire connaître certaines propositions et d'approfondir un certain nombre de relations essentielles, puis d'examiner l'étroite liaison des notions qui sont appelées à jouer, à la base des théories de l'économie régionale, un rôle capital.

Certes, certains réflexes de solidarité ne pourront empêcher l'opposition aux « mathématisations » de céder à la tentation du réquisitoire. Mais les impératifs de plus en plus intenses de cette solidarité ne pourront interdire aux « libéraux » de dégager leur responsabilité, lorsque l'allure prise par les développements de l'auteur entraîneront, sans aucun doute, de redoutables sujets d'angoisse.

Personnellement, si j'avais à émettre un nouveau paradoxe ou à exprimer une simple constatation, je dirais que les problèmes étudiés par l'auteur — dont la sûreté d'analyse ne laisse nulle faille — m'ont, pour la première fois, convaincu de la réalité scientifique de la notion d'économie régionale et qu'ils mettent en pleine lumière celle des liaisons interrégionales et des interdépendances régionales.

*

*   *

Avant de suivre le déroulement technique que les divers *Cahiers* respectent dans un ordonnancement strict mais judicieux, plaisant aux yeux du mathématicien, je sollicite, dans ces premières pages, l'attention du lecteur sur quelques principes de base et l'utile méditation à laquelle l'invite l'apparition d'êtres mathématiques, les uns, connus et vivants, les autres moins glorieux ou plus discrets dans nos études économiques.

Comme toute activité intellectuelle, la mathématique énonce, à propos de ses objets, des relations. Mais elle limite son domaine à l'étude de certaines relations : égalité, appartenance, inclusions..., qu'elle définit elle-même.

Elle impose à ses relations certains caractères qui les séparent de nombreuses relations courantes. En particulier, chacun sait que les relations mathématiques ne font jamais intervenir les notions philosophiques de nécessaire et de contingent, de principe et de conséquence, de cause et d'effet. La mathématique ignore donc la métaphysique et, pour elle, tout se passe au présent.

Elle ignore aussi, les subtilités d'une pensée modale qui se complaît à tempérer ou à accentuer ses assertions d'une foule de nuances psychologiques. Toute relation mathématique est, soit affirmée, soit niée, brutalement. Mais ce dépouillement n'est pas incompatible avec une certaine richesse dont la source réside dans la répétition et la combinaison. La mathématique admet que la négation peut être itérée autant de fois qu'on le veut et que toute relation affirmative ou négative peut être combinée avec une autre relation, la combinaison ainsi obtenue étant une nouvelle relation complexe appelée disjonction des deux premières.

La possibilité d'itérer la négation et la disjonction laisse entrevoir la complexité des relations susceptibles d'être formées à partir de cet outillage rudimentaire. Initialement, la mathématique ne demande rien d'autre.

Le sens commun juge une relation affirmative ou négative, en disant qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse. Il arrive, d'ailleurs, fréquemment, qu'il suspende son jugement, faute de renseignements. Plus ou moins implicitement, le sens commun admet donc que ce qui lui permet de juger la « valeur de vérité » d'une relation, c'est un corps de renseignements. En d'autres termes, le sens commun discerne la vérité ou la fausseté d'une relation au moyen d'un ensemble d'assertions, qu'il considère comme absolument hors de doute, joint à un ensemble de règles logiques assurant le passage en toute certitude de relations vraies à d'autres relations vraies.

Un tel corps de renseignements s'appelle théorie, en mathématiques. Afin de parvenir au maximum de clarté et de précision, la mathématique demande à ceux qui se proposent de reconnaître avec elle les relations vraies et les relations fausses, de passer un contrat comprenant plusieurs accords :

1) un accord concernant les relations qui seront prises en considération dans la théorie ;
2) un accord sur la vérité d'un certain nombre de relations explicitement posées ;
3) un accord sur les règles logiques assurant le passage de relations vraies à d'autres relations vraies.

Se placer dans une théorie, au sens mathématique du terme, c'est souscrire à ces accords. Il n'y a pas de vérité mathématique en dehors d'une théorie et les relations de la théorie sont ainsi relativisées par des limitations contractuelles précises.

Il convient, sans aucun doute, d'insister sur la liberté absolue que cette conception permet dans le choix des vérités de départ qui constituent les axiomes d'une théorie, puisque la possibilité d'une incompatibilité de ces axiomes est explicitement prévue par la notion de théorie contradictoire.

Ce qui, dans de nombreux esprits, donne l'aspect aberrant de la démonstration vient à peu près exclusivement de ce que les textes courants ne sont généralement pas présentés avec toute la rigueur qu'exigerait le respect des quelques définitions précédentes — prises un peu au hasard dans le lot des données mentales choisies par le mathématicien [2].

Nous pourrions encore discerner de nombreux points des discussions mathématiques les plus élémentaires qui laissent perplexe tout esprit accoutumé à une longue réflexion : la notion de fonction qui paraît être tellement intuitive et innée qu'on ne se donne point la peine, généralement, de l'étudier avec soin, est de ceux-là.

Mais, outre ces très simples rappels aux besoins constants qu'éprouve le mathématicien de cerner avec toute la précision désirable, le contenu des notions les plus fréquentes de sa discipline,

2. Voici un cas très simple qui montre que l'on mêle (souvent) dans l'exposé préliminaire, la présentation des objets aux hypothèses faites sur eux. Pour introduire la démonstration d'un théorème connu, on dit, par exemple : « Considérons — (soit, étant donné) — un triangle ABC, rectangle en A, montrons que : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. »

peut-être est-il utile de s'arrêter un instant sur la vertu des symboles et des notations qui, dans l'écriture matricielle comme dans toute autre terminologie mathématique actuellement en honneur, créent souvent l'un des écueils sur lesquels trébuchent les non-initiés.

Dans la conception contemporaine, l'hypothèse et la conclusion d'un développement mathématique, sont considérées comme des écritures et le raisonnement qui en forme la trame est, lui-même, réduit à un jeu d'écritures qui permet de passer de l'écriture de l'hypothèse à l'écriture de la conclusion.

Traitant du problème des notations, M. J.-A. Ville [3] souligne que l'enseignement classique est muet et évoque ce qu'il dénomme le « problème de décidabilité » et se réfère au texte suivant d'Andrzej Grzegorczyk qu'il est, peut-être, opportun de reproduire dans ces pages :

« Notons qu'il n'y a pas, en fait, de différence essentielle entre l'action de décider, au sujet d'une substance dans un tube à essai, si elle contient du chlore par exemple ou n'en contient pas, et l'action de décider d'un entier positif individuellement donné, s'il est un nombre premier ou ne l'est pas. Tout nombre naturel donné peut être mis sous forme d'une écriture au moyen d'un système de notation convenable. La division de ce nombre par des nombres naturels inférieurs à lui, est donc un procédé graphique consistant à transformer certaines écritures en d'autres conformément à certaines règles générales. Il en est de même de toutes les méthodes effectives des mathématiques : elles se réduisent à certains procédés empiriques portant sur les écritures. »

La longue file de symboles et de notations établie par M. J.-R. Boudeville témoigne d'une fidélité remarquable aux implications des concepts mathématiques, tels que la tradition et l'usage les ont, aujourd'hui, consacrés.

Il faut louer l'auteur d'avoir compris, dès les premières étapes de sa construction, l'importance capitale du problème des notations et la richesse du symbolisme qui permet de dégager certaines notions difficiles à mettre en évidence par un raisonnement direct.

Ce qui pourrait, aux yeux de certains, apparaître comme très classique dans la présentation de quelques éléments du calcul matri-

3. Voir les *Cahiers* de l'I.S.É.A. (groupe de mathématiques économiques), supplément n° 138, juin 1963 (E, N° 2), pages 17-18.

ciel, révèle un souci majeur de clarifier au maximum la terminologie qu'il utilise.

On pourra, cependant, éprouver une certaine inquiétude en constatant que l'auteur, maniant avec dextérité le jeu des règles vectorielles, ait cru nécessaire de s'en tenir à leur langage, au début de son étude, plutôt que de s'inspirer (n'était-ce point un départ plus logique ?) de quelques définitions fort classiques.

Un graphique est sûrement plus clair qu'un tableau, mais un tableau est certainement plus précis, malgré la lourdeur qu'il implique. Et la clarté risque d'être légèrement compromise si l'on retient que la notion de vecteur, en mathématiques, est distincte de celle qu'emploie le spécialiste d'économétrie vectorielle, en ce sens que, dans la conception économique, un vecteur est fréquemment utilisé comme une représentation commode mais dangereuse d'une synthèse d'observations.

Dans la pureté mathématique simple, une matrice carrée d'ordre n se définit comme un ensemble de n^2 membres (nombres ou notations algébriques) présentés, visuellement, de la manière suivante [4] :

$$(M) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & & & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \dots & & M_{2n} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & \dots & M_{3n} \\ \dots & & & & & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & M_{n4} & M_{n5} \dots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

De même, lorsque l'on veut étendre la notion de matrice et de produit de deux matrices, on est amené à définir la matrice rectangulaire de m sur n, comme un *tableau* de mn éléments rangés en m lignes et n colonnes, selon les mêmes notations que pour une matrice carrée (dans laquelle $m = n$). Alors, apparaissent les concepts de *vecteur-colonne* et de *vecteur-ligne*, spécifiés dans la terminologie

4. Le lecteur pourrait suivre les textes de M. J.-R. Boudeville en y associant les développements très progressifs consacrés aux matrices, de M. G. Tintner : *Mathématiques et statistiques pour les économistes*, volume I : *Méthodes élémentaires*, page 96 et suivantes. (Éditions Dunod, Collection H. Hierche, traduction de J. de Marcillac, Paris, 1962).

matricielle et qui peuvent être figurés de la façon ci-après (dans le cas simple des matrices de n sur 1 ou de 1 sur n).

Un vecteur-colonne est une matrice rectangulaire de n sur 1 qui s'écrit :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Une matrice carrée d'ordre n est constituée de n vecteurs-colonnes, de la façon suivante :

$$(M) = (M_1\, M_2\, M_3 \ldots\ldots M_j \ldots\ldots M_n)$$

Le vecteur-ligne est une matrice rectangulaire de 1 sur n, qui traduit, en quelque sorte, la transposition d'un vecteur-colonne :

$$X' = (x_1\, x_2\, x_3 \ldots\ldots x_n)$$

Une matrice carrée d'ordre n est constituée de n vecteurs-lignes de la manière suivante :

$$(M) = \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ \vdots \\ M'_j \\ \vdots \\ M'_n \end{bmatrix}$$

Bien entendu, ceci n'enlève rien de la valeur de la présentation de M. J.-R. Boudeville. J'ai simplement eu l'impression que le mot « vecteur » était introduit *ex abrupto* et pouvait conduire à une légère déviation.

Tout n'est pas dit sur le calcul matriciel utilisable par les économistes. On eût aimé de plus larges développements explicites accompagnés de calculs pratiques, sur les équations matricielles, les matrices inverses, les critères d'applicabilité de la méthode de Crout, si allégeante en maintes hypothèses de travail concret, en particulier lorsqu'il devient nécessaire de se livrer à des calculs rapides de déterminants.

Mais l'essentiel n'est pas là. L'auteur sait parfaitement de quel genre de mathématiques il parle et à quel rôle il fait allusion dans les travaux d'économie régionale.

La seule raison de la remarque précédente réside, essentiellement, dans ce fait que les mathématiques économiques fondamentales étant relatives à la théorie des espaces vectoriels et des matrices, ainsi qu'à la théorie des ensembles convexes, à la théorie des probabilités et à la topologie (continuité et semi-continuité), il semble naturel sinon de défricher complètement le « terrain matriciel », du moins d'en extraire le maximum de potentialité, d'en lier la structure aux fondements mêmes de la pensée mathématique, d'en discuter le sens profond en se plaçant au niveau des connaissances dont les contours ne sont pas toujours dessinés avec la limpidité requise, même chez le mathématicien pur.

Je pense que, dans l'ensemble des problèmes théoriques et techniques de l'économie régionale vue sous l'optique mathématique, le *théorème du point fixe* peut être à l'origine de nombreuses et très variées possibilités d'application et que son étude peut conduire à des éclaircissements réciproques et à des rencontres intellectuelles entre mathématiciens et économistes.

Ce théorème — bien connu — sous sa forme la plus simple, s'énonce : si un ensemble convexe se transforme en un ensemble qui y est contenu, il existe un point qui se transforme en lui-même, sous condition que la transformation soit continue.

La démonstration en est extrêmement délicate : elle fait intervenir le degré d'une transformation, notion topologique que le mathématicien pourra utiliser ailleurs, mais que l'économiste ne reverra jamais plus. Pourtant, il est indispensable que l'économiste connaisse ce théorème. Il faut donc le lui présenter sous une forme qui lui soit accessible. C'est pourquoi nous pensons qu'au lieu de présenter ce théorème sous forme abstraite et de l'appliquer à un système économique, il faut l'énoncer sous une forme économique. Il prend, alors, un tout autre aspect. On considérera un premier état d'un système économique et on étudiera l'évolution du système pendant un temps donné. Si l'évolution est certaine, à chaque état primitif correspond un état final. Ceci peut se représenter par un schéma très simple, si l'on possède bien la notion de vecteur. Si l'on considère, maintenant, un ensemble d'états d'un système économique, états initiaux, remplissant une certaine portion d'espace, et que l'on associe à cet ensemble, l'ensemble des états finaux, le fait que le premier contienne le second a une signification économique. Cette signification est la suivante : si le système évolue de la même manière, il reste toujours dans un certain domaine. Il n'est pas stable, à proprement parler, *mais il reste encadré dans des limites stables*. Voilà le fait fondamental. Nous cherchons évidemment un système stable en lui-même, qui prenne un état qui se reproduise indéfiniment ; c'est un degré supplémentaire. Mais nous savons qu'avec des échanges extérieurs dont la balance est nulle sur un temps long, nous obtenons un état constant. Il reste à annuler cette balance, non pas en moyenne, mais à tout instant. Comment montrer que ce point fixe (état stable) existe ? La démonstration mathématique est difficile, avons-nous dit. Pourquoi ? Parce que si l'on substitue au domaine continu, un domaine discontinu, caractérisé par un certain nombre de points, *comme on serait obligé de le faire en pratique*, le théorème mathématique disparaît complètement, alors que le phénomène économique subsiste.

Il faut donc interpréter, d'une façon nouvelle, le théorème et l'exposer dans le cas où l'on peut expliciter la transformation. Nous avons alors à considérer une double liste de vecteurs (vecteurs initiaux et vecteurs finaux y associés) et à chercher celui de ces vecteurs qui se déplace le moins. Pour des liaisons simples, on doit estimer cette variation qui exprime la sensibilité du système à des erreurs de prévision. De cette manière, on fournit, à la fois, la véritable signification du théorème et ses limites. Ceci exige, naturellement, que l'on procède à la généralisation de l'hypothèse de continuité.

Lorsque le théorème du point fixe n'est plus donné sous sa forme élémentaire, mais sous la forme la plus générale indiquée par Kakutani, on voit qu'il interprète une évolution non déterministe. La discussion doit être reprise parce que le point fixe n'a plus la signification rigoureuse du cas élémentaire. Il ne désigne plus un état stable ou permanent, mais un état qui *peut* être stable par un choix convenable d'une de ses évolutions possibles.

Les difficultés rencontrées dans l'étude des points fixes se retrouvent, à un degré d'abstraction moindre, mais avec des complications analytiques accrues, dans l'étude des matrices positives.

Il est, certes, impossible de se passer du calcul matriciel, en économie, et les travaux de M. J.-R. Boudeville montrent suffisamment tout le profit que l'on en peut retirer dans l'analyse des interdépendances régionales.

Mais — et cette remarque ne vaut pas seulement pour l'analyse de notre collègue — il semble que les efforts entrepris pour l'exposer en langage économique aient été quelquefois appauvris par un effet de polarisation mathématique trop puissant. Les travaux de W. Léontief ne me semblent pas échapper entièrement à cette critique.

Par exemple, le phénomène de dualité dans les inéquations linéaires qui apparaît dans la comparaison entre :

$$\sum_j A_{ij} X_j < X_i, \quad \sum_i A_{ij} \mathcal{Q}_i > \mathcal{Q}_j,$$

— systèmes tels que si l'un est impossible, l'autre est possible et inversement — a une interprétation économique.

Le premier système exprime que les A_{ij} sont les coefficients technologiques d'un système *qui peut techniquement croître* (les X étant des quantités). Le second système exprime (les $\mathcal{Q}$ étant les prix) que, pour une certaine politique financière, le système fait faillite du point de vue comptable. Nous voyons là un aspect de l'influence de la méthode mathématique : le calcul des prix peut être considéré comme un artifice pour résoudre le problème posé ; mais la possibilité du calcul a une signification plus profonde. Elle montre que les prix peuvent être maniés pour diriger une économie, idée naturelle mais vague, qui ne peut être précisée que si l'on fait appel à la dualité.

Les calculs de prix peuvent servir à dégager certains faits économiques et nous pouvons les appliquer à des études de programmes pour régions (ou pays) en voie de développement. Là encore, il est nécessaire d'interpréter économiquement les théories mathématiques. Lorsque l'on écrit une matrice technologique, telle que :

$$Y_i = \sum A_{ij} X_j,$$

exprimant les besoins (en Y) pour fabriquer X, l'itération de cette matrice donne les besoins *initiaux* pour obtenir un résultat final.

Mais écrivant :

$$Y = AX,$$

on constate que si l'on cherche à utiliser Y, on obtient comme résultat :

$$X = A^{-1} Y$$

expression, en général, dénuée de sens. Cette difficulté peut être tournée si une certaine partie de Y est non utilisée, de sorte que la relation est de la forme :

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2, \\ X &= X_1 + X_2, \\ Y_1 &= A X_1, \\ Y_2 &= X_2 ; \end{aligned}$$

et, par conséquent, Y est lié à X par une relation :

$$Y = A\ (X - Z) + Z$$

qui s'inverse en :

$$X = Z + A^{-1}\ (Y - Z),$$

expression qui a un sens pour un choix convenable de Z. Cette expression permet de lier la valeur de Y à celle de X.

Elle montre, d'ailleurs, qu'il apparaît un problème plus général, se traduisant par une liaison entre X et Y de la forme :

$$\begin{cases} Y = \sum A_i\ X_i, \\ X = \sum X_i, \end{cases}$$

le calcul de X en fonction de Y étant une sorte d'inversion dans le groupe de matrices : $A_1, \ldots\ldots\ A_n$.

On remarquera que ce genre de problèmes fait intervenir *plusieurs* matrices technologiques et est, par conséquent, adapté à l'étude des régions en voie de développement, où plusieurs technologies, dans le cas le plus simple, existent : l'une, dite archaïque, peu productive, mais pour laquelle les moyens existent abondamment, l'autre, dite moderne, productive, mais pour laquelle les moyens sont rares.

Les programmes doivent calculer ce que la seconde doit prélever sur la première pour grandir, et évaluer ce qu'une aide extérieure peut faire pour accélérer le processus de transformation, ce qui revient à déterminer les apports dus aux échanges interrégionaux d'après des règles différentes des règles usuelles.

On constate, alors, que tandis que l'itération d'une matrice conduit à une croissance exponentielle, l'itération d'un système de matrices, au sens indiqué plus haut, conduit à une croissance non exponentielle, phénomène dont on saisit, tout de suite, la portée dans les calculs de prévision, d'amortissement, etc.

Les études des modèles simples dégagent ces notions de croissance non exponentielle, qu'il est absolument impossible de faire apparaître sans recourir à des notions mathématiques. Quant aux modèles plus complets, on constate que les calculs classiques de valeurs propres deviennent inopérants, que les pas d'évolution doivent être pris un à un, ce qui justifie l'emploi de machines électroniques pour la solution.

Les développements qui précèdent peuvent être rapprochés de ceux que monsieur Boudeville présente lorsqu'il traite du calcul de la matrice inverse et, plus particulièrement, quand il procède au calcul par itération.

De même, l'interprétation que nous avons donnée du théorème du point fixe est susceptible de manifester ses enseignements de prudence lorsqu'il est question de l' « équilibre de la balance commerciale et de l'effet en retour ».

*

* *

L'excellence de l'appareil mathématique exposé et utilisé par M. Boudeville dans son analyse *des programmes linéaires*, nous incite à dessiner, sommairement, ce que l'on pourrait appeler les méthodes de programmation, de manière à montrer que si l'on peut élaborer une méthode générale de programmation, à partir de cas particuliers aux objectifs, l'augmentation de la complexité, la dilatation du modèle entraînent un changement dans la structure même des méthodes.

Simples remarques au sujet des méthodes de programme des micro-décisions. —

La particularité des programmes témoigne de la complexité croissante des applications aux affectations, aux transports, à la fabrication, etc.

Un programme d'affectation est facile à définir : il consiste à étudier les divers plans d'affectation de 4 véhicules, par exemple : *A*, *B*, *C*, *D*, à 4 destinations : *P*, *Q*, *R*, *S*.

Sous forme de matrice, on peut avoir l'évaluation du rendement de chaque affectation (tableau I). Il y en a 4, c'est-à-dire : 4 ! = 24.

Tableau I

	A	B	C	D
P	1	2	2	5
Q	2	5	6	4
R	3	3	8	7
S	3	7	6	1

Mais lorsque les ensembles qu'il faut affecter sont multiples, le nombre des possibilités augmente : 24 pour 4 éléments, 120 pour 5, plus de 3 millions pour 10, 1,300 milliards pour 15, etc. Même avec des machines électroniques il faut renoncer à énumérer les cas possibles d'un programme d'affectation d'une taille raisonnable au moyen des mathématiques traditionnelles.

C'est ici qu'intervient, alors, une méthode moins classique, mais plus efficace : la méthode des approximations successives, exploitée en vue de rechercher un maximum ou un minimum.

Pour y parvenir, l'opérateur chemine de point en point vers ce qui paraîtra le point le plus élevé, en s'assurant qu'aucun endroit plus élevé n'apparaît dans le rayon du sommet présumé. Il s'efforcera donc d'élargir au maximum cette relation de « voisinage » pour s'assurer du résultat.

L'emploi des méthodes dites « insolites » n'est, finalement, qu'une métaphore et, ici, les « points » sont des éléments discrets, au sens statistique, c'est-à-dire les programmes d'affectation. Il s'agit, alors, de définir les conditions de voisinage, c'est-à-dire de faible différence entre deux programmes, de manière à passer de programme en programme jusqu'au meilleur.

Cette organisation logique s'applique à la plupart des cas : programmes de transport, d'allocations aux postes de travail, au renouvellement des stocks, etc.

Nous ne pouvons, sans doute, songer à l'exploration systématique de tous les domaines de l'économie où l'on peut trouver des situations d'application, notre but, strictement mathématique, étant de faire ressortir l'intérêt de la méthodologie de M. Boudeville et de glaner un certain nombre de développements capables de motiver quelques réflexions liminaires.

La théorie des programmes linéaires introduit facilement le nœud central d'une théorie générale de la programmation.

Pour qu'un système de valeurs numériques pour x, y, z, représente un programme acceptable, il faut et il suffit que ces nombres satisfassent à un système de conditions linéaires telles que :

$$ax + by + cz + \ldots\ldots \geqq h \text{ (inéquation)},$$

ou bien :

$$Ax + By + Cz + \ldots\ldots = H \text{ (équation)},$$

en nombre quelconque.

Le choix entre deux ou plusieurs programmes se fait au moyen d'un critère économique susceptible d'être exprimé linéairement :

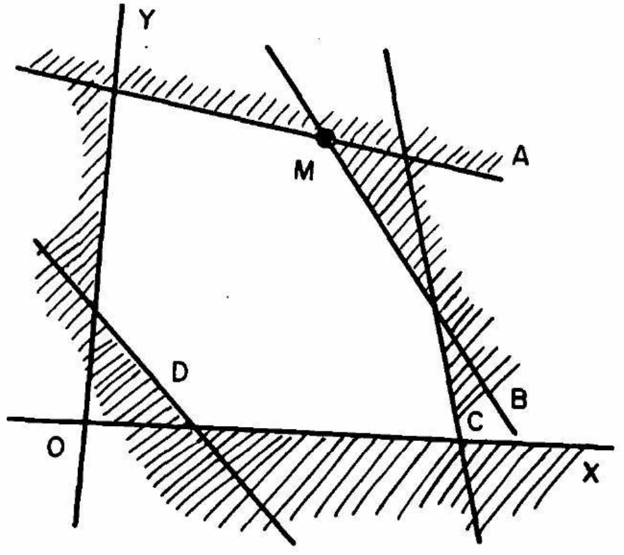
$$V = px + qy + rz + \ldots\ldots$$

Il convient alors de définir les programmes extrêmes au moyen des blocages, c'est-à-dire des cas où une condition telle que : $ax + by + \ldots\ldots > h$, se trouve satisfaite, mais à la limite (le signe $>$ devenant $=$).

On est donc ramené à un schéma combinatoire : un choix à faire parmi un nombre fini, mais, en général, colossal de combinaisons admissibles.

L'opérateur est capable de poursuivre son travail analytique dès qu'il a aperçu la *connexité* qui règne entre ces programmes admissibles. À tout programme extrême, on associe ses adjacents ; il ne reste, enfin, qu'à organiser un cheminement méthodique.

Le graphique suivant résume la théorie dans l'hypothèse la plus simplifiée en montrant la linéarité des fonctions représentables par des droites.



Chacune d'elles sépare le plan en deux régions telles que les coordonnées d'un point quelconque de ces régions pourraient être la solution recherchée, dans le quadrant positif des axes, dans le cas simple des x, y, z, positifs.

Il reste, finalement, un polygone convexe dont les points intérieurs représentent les solutions possibles qui correspondent aux conditions ou contraintes fixées au début par les inéquations ou équations.

La solution optimale est donnée par les coordonnées du sommet extrême (M) de ce polygone sur lequel vient s'appuyer la droite représentant le critère à maximiser (ou à rendre minimum dans le cas inverse).

Dans un espace à trois dimensions, on se trouve en présence de polyèdres que l'on peut analyser suivant une méthode homologue, de cheminement ou d'approximations successives jusqu'à l'obtention de la meilleure solution.

Cette solution graphique, abstraite et simpliste, n'est qu'un guide pour l'esprit et devient rapidement impraticable pour des problèmes complexes.

Tout mathématicien-économiste sait qu'il existe des méthodes qui procèdent par analogies, isomorphies, faisant appel à la dualité (théorie des jeux) et qui permettent de résoudre simultanément un ensemble de problèmes connexes.

Il est difficile de nier l'importance pratique des méthodes linéaires, mais il semble bien que les méthodes combinatoires restent encore les plus fécondes.

Il eût été intéressant, dans les études d'économie régionale de l'I.S.E.A., de montrer que les solutions doivent être fragmentées pour être mieux détaillées, un programme se décomposant, rationnellement, en une séquence de programmes partiels mais enchaînés, qui sont résolus successivement par récurrence, au moyen de *calculs d'optimum* effectués à toutes les périodes de la séquence et basés sur une technique d'actualisation (taux d'intérêt) ainsi que sur une représentation comptable des incertitudes de l'avenir (probabilisation).

Seules, les méthodes combinatoires peuvent faciliter la détermination d'une espérance économique, c'est-à-dire, d'une expression mathématique correcte apte à guider la décision.

Quel que soit le degré d'avancement en cette matière, au niveau de la firme, on se heurte aux exigences de la planification et aux difficultés d'une synthèse indispensable à l'élaboration d'un modèle général. Car si le programme doit être un ensemble cohérent d'objectifs et de moyens relatifs au développement de la région considérée, il n'en reste pas moins que celui-ci doit tenir compte des priorités fixées par les autorités responsables et des contraintes techniques et sociales qu'on sous-estime, généralement.

Il apparaît, ainsi, que l'on est amené à tenter de jumeler des décisions qui ne sont pas compatibles au départ, d'où les problèmes de sélection, de cohérence et d'harmonisation des décisions des agents économiques qui se posent immanquablement.

En évoquant l'écueil qui se révèle lors de la synthèse des plans différents établis par les firmes, nous désirons simplement signaler le problème du test de cohérence des programmes de secteur, celui de leur compatibilité avec l'évolution prévue de la demande finale, des échanges extérieurs et des possibilités de financement qui, à notre sens, peuvent et doivent être traduits au plan des interrelations régionales.

À une condition cependant : c'est que les problèmes de *cohérence* (équilibre annuel et développement) et de *choix* (optimum) puissent être intégrés à un modèle économétrique qui les résoudrait simultanément.

Simples remarques au sujet des méthodes de programmation macro-économique. —

La technique de la programmation macro-économique de la comptabilité nationale française mériterait, semble-t-il, d'être décrite dans le but de rapprocher certaines méthodes qu'elle utilise de celles que M. Boudeville analyse à propos des interrelations régionales.

En particulier, les méthodes de vérification de l'équilibre général, les instruments du test de cohérence, l'établissement et la critique des comptes d'équilibre trouveraient une place naturelle dans l'étude présente [5].

Dans l'étude précitée, il est surtout question de la méthode du cheminement dans la prévision de la croissance, de l'enchaînement dynamique des flux et du rôle moteur des investissements, de la mesure du degré de plasticité des progressions envisagées.

Le rappel qui y est fait du modèle de « flèches » de J. Tinbergen vise tout spécialement la question épineuse de la *plasticité d'une progression,* c'est-à-dire de la possibilité d'infléchir les rythmes annuels successifs du développement d'un flux économique quelconque, au cours d'une période pluri-annuelle, tout en respectant l'objectif terminal de ce flux.

*

* *

Le lecteur saisira la très judicieuse analyse sur la convexité et les programmes linéaires. Je pense que la méthode présentée dans la *généralisation* des notions de convexité aboutit à un apport important. Reprenons, un instant, le passage visé :

5. Le lecteur pourrait, éventuellement, se reporter à l'article que nous avons publié : « Les méthodes de programmation en France », dans la revue *Études économiques,* de l'Institut supérieur commercial et consulaire de Mons (nos 112-113 de novembre 1960). Cette étude présente un certain nombre de points de contacts avec l'étude des programmes linéaires faite par M. J.-R. Boudeville.

« Soit un espace E_n à n dimensions et m vecteurs dépendants ou non dans cet espace : $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$. On appelle combinaison linéaire convexe de ces vecteurs un vecteur résultant tel que :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots\ldots + \alpha_m a_m.$$

$$\alpha_i \geqq 0 \; ; \; i = 1 \ldots\ldots m.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_m = 1.$$

On peut montrer que tout point (vecteur) situé sur le segment qui joint deux points de l'espace E_n est une combinaison linéaire de ces deux points (vecteurs). Inversement, si un point (vecteur) peut être exprimé comme une combinaison de deux points (vecteurs) de E_n, il se trouve sur le segment qui joint ces deux points. Cette propriété permet de définir, géométriquement, un *ensemble convexe.* »

La structure de ce développement n'est pas suffisamment éclairante, mais les exemples donnés à la suite de l'exposition théorique nourris de la terminologie mathématique contemporaine compensent heureusement le manque d' « éclairage » auquel nous venons de faire allusion. (Il eût été très opportun de noter ici, la supériorité, sur les mathématiques classiques, de la symbolisation moderne) [6].

Il reste que la méthode « simplex » qui repose sur une observation géométrique et « qui comporte une interprétation économique très simple », peut être généralisée et qu'elle témoigne d'un degré de « rentabilité théorique » considérable et puissamment progressif.

*

* *

Un des *Cahiers* se termine sur la notion d'espace multidimensionnel et sur l'établissement d'un parallèle entre le concept d'espace mathématique et celui d'espace géographique « pour façonner une notion synthétique à la mesure de l'homme ».

---

6. Nous recommandons spécialement la lecture du texte lumineux de la conférence que M. J.-A. Ville a prononcée à l'I.S.É.A. et qui a été publié dans les *Cahiers de l'I.S.É.A.* (groupe d'études de mathématiques économiques), série E, n° 2, (juin 1963).

Le tome I de l'ouvrage intitulé : « *Principes de mathématiques économiques* », rédigé par M. Pierre Rocher et moi-même — en voie de publication — fait une large place aux définitions les plus élémentaires des mathématiques contemporaines et au problème de la symbolisation.

Ces pages sont trop minces par leur volume, mais suffisamment denses par leur contenu et suffisamment convaincantes, à la fois, par leur *originalité* ainsi que par une sûreté d'analyse dont il faut louer tout particulièrement l'auteur.

Le tableau qui résume la représentation des *objets* décomposés en *points* : éléments linéaires, éléments plans, solides ou hyperplans, hyperespaces et le fameux triangle arithmétique de Pascal, est curieux. Il y aurait, sans doute, ici, ample matière d'analyse pour l'historien des sciences mathématiques en comparant certains travaux de Pascal et certains travaux de Désargues.

Mais le point capital qui ressort de cette rencontre (fortuite ?) réside dans la généralisation du théorème de Désargues dans n dimensions et dans la possibilité de construire des solides linéaires convexes dont on se sert en programme linéaire.

L'extension du théorème à 4 dimensions est *simple, précise* et *riche*. Si l'examen de la figure représentative de l'intersection de deux hyperplans dans un espace à quatre dimensions peut provoquer certaines difficultés d'intelligibilité immédiate, la construction soignée est complète et déterminante aux yeux du mathématicien.

* * *

Je laisse, maintenant, le soin aux spécialistes d'économie régionale de méditer sur les conclusions de l'auteur concernant la notion d'espace telle que la voit ou la comprend l'économiste désireux d'accéder à des issues concrètes sur le terrain d'une économie géographique, au plein sens du terme.

Les travaux de M. Boudeville forment un ensemble d'instruments d'analyse indispensables aux spécialistes d'économie régionale et géographique qui ont l'ambition de faire œuvre neuve ou originale. Ils constituent, en même temps, une synthèse mathématique des méthodes appelées à consolider les bases d'une théorie générale de l'économie pensée en fonction de l'espace.

Le mathématicien ne peut, en aucune manière, formuler une critique fondamentale aux analyses mathématiques exposées. Il doit, à mon sens, repérer un certain nombre de techniques majeures, sans, pour autant, chercher à réduire l'efficacité des procédés classiques, dans un champ d'études qui est, aujourd'hui, intensément exploré mais, peut-être, insuffisamment ouvert aux mathématiciens dont le rôle peut devenir, en l'occurrence, primordial.

M. François Perroux a mis en pleine lumière de nouvelles et nombreuses notions que M. Boudeville rappelle opportunément et que les mathématiciens ont le devoir de cerner d'une manière attentive. Ici, comme en d'autres domaines de la pensée économique, la *rencontre* est destinée à affermir les bases et à définir les critères d'une science régionale dont M. Boudeville est, aujourd'hui, en France, l'un des plus brillants représentants, et, en raison même de la structure mathématique non « plaquée », mais habilement adaptée aux solutions recherchées, qu'il nous invite à étudier, l'authentique spécialiste.

Victor ROUQUET LA GARRIGUE,
directeur d'étude à l'École Pratique des Hautes Études (Sorbonne).