L'Actualité économique

Précisions sur la courbe de Lorenz

Claude Tricot

Volume 37, numéro 4, janvier–mars 1962

Aspects de l'économie canadienne

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1001707ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1001707ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Commentaires

Précisions sur la courbe de Lorenz

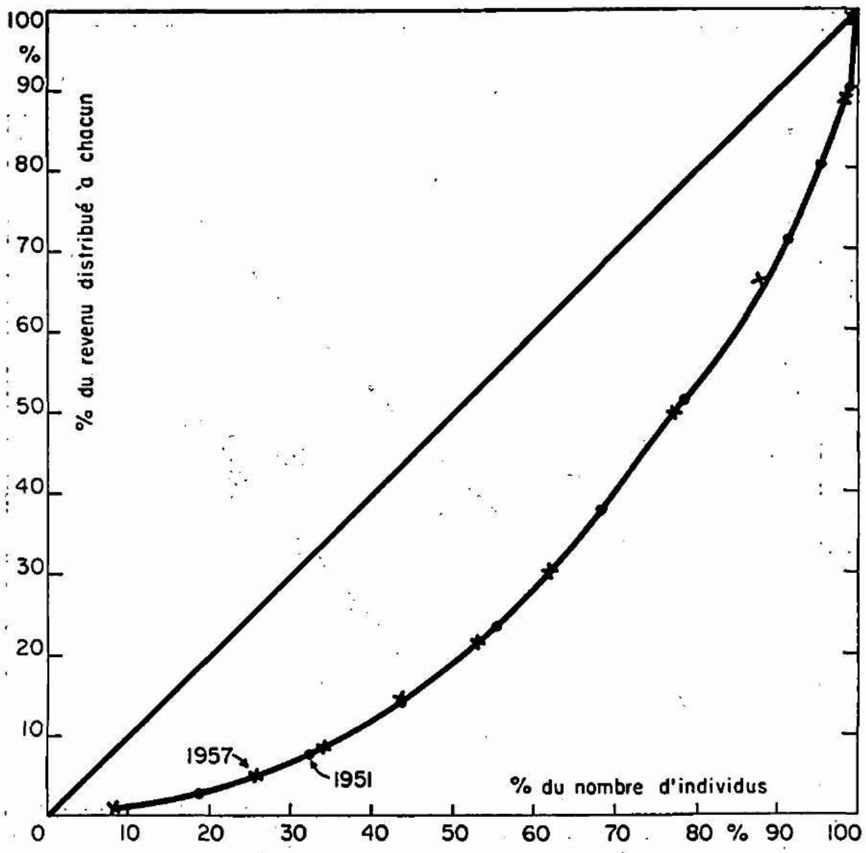
Cette étude veut éclairer un problème posé par l'Institut d'Économie appliquée, problème venu lui-même à la suite d'un article de monsieur Bernard Bonin, dans le numéro d'avril-juin 1960 de *L'Actualité Économique*[1]. Voici de quoi il s'agit: M. Bonin ayant construit une courbe de Lorenz (graph. I) pour chacune des deux répartitions de revenus au Canada des années 1947 et 1957 constata la coïncidence des deux courbes, ce qui lui parut contraire à l'idée qu'il avait d'une égalisation des revenus au cours de cette période. On taxa la courbe d'insensibilité, ce qui fit donc question.

Pour ce qui est des deux courbes particulières incriminées, après les avoir tracées de nouveau en utilisant un plus grand nombre de points, nous avons pu constater qu'elles sont, en fait, distinctes. Cela ne règle pas tout à fait la question, car les courbes sont proches et monsieur Bonin les voulait sans doute éloignées; de plus, il reste le problème général de la sensibilité de la courbe: un graphique devrait pouvoir servir sans l'aide d'un microscope électronique. (graph. II)

Lorsqu'on présente à l'ordinaire la courbe de Lorenz, on lui fait la part belle en imaginant des situations théoriques extrêmes: dans un premier cas tout le monde a le même revenu; dans un deuxième cas, personne n'a rien sauf un méchant qui a tout.

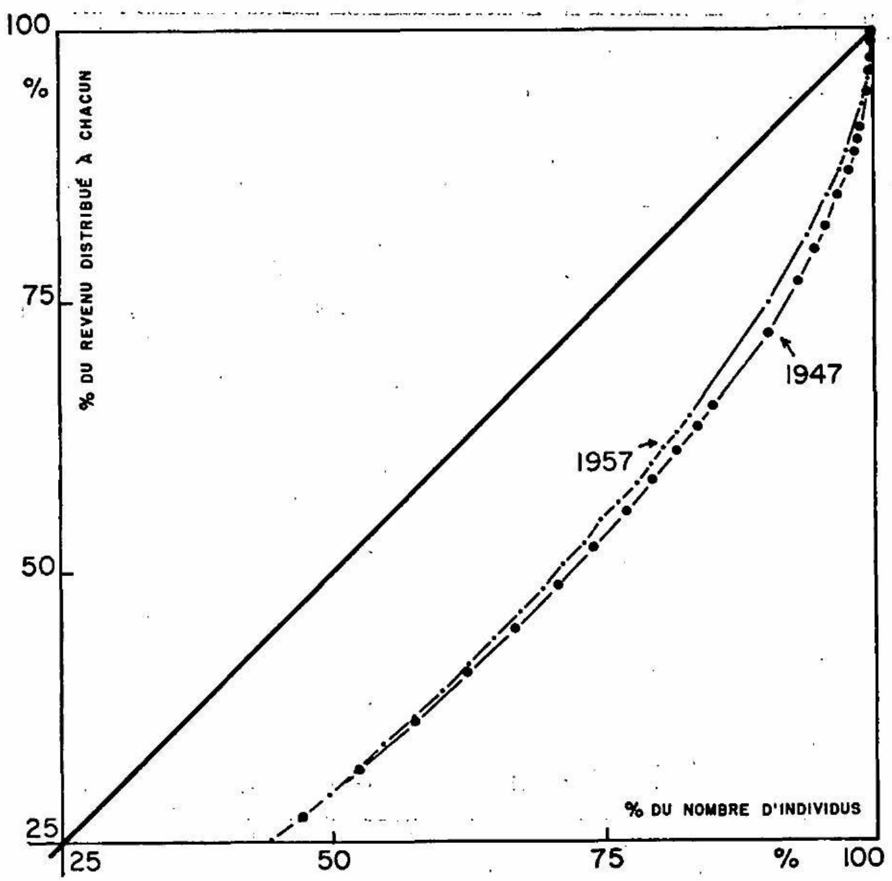
1. Bonin, Bernard, «Évolution des dépenses personnelles en biens et services au Canada», et «Observations sur l'emploi de la courbe de Lorenz», *L'Actualité Économique*, avril-juin 1960, pp. 72-86 et 150-153.

Graphique I



Rappelons que, pour tracer la courbe de Lorenz, on suppose les membres de la population considérée rangés par ordre de revenus croissants; le plus pauvre et son revenu donnent un point (les pourcentages que ce pauvre représente, en nombre et en revenu sont l'abscisse et l'ordonnée du point); les deux plus pauvres et leurs revenus cumulés donnent un autre point, etc. . . De cette façon, dans le premier cas envisagé plus haut, les revenus augmentant proportionnellement au nombre d'individus, la courbe de Lorenz est une droite, bissectrice des axes. Dans le deuxième cas, tout le groupe des désargentés donne une courbe rasant l'axe des abscisses tandis que le dernier membre de la population, complétant les 100 p.c. des membres, apporte les 100 p.c. de revenus, ce qui crée une montée subite de la courbe. Dans les deux

Graphique II



cas, le revenu moyen peut très bien être resté le même; en revanche, la dispersion des revenus autour de la moyenne a certainement changé: dans le premier cas, un coefficient de dispersion comme l'écart-type serait nul, chaque revenu étant égal à la moyenne; dans le second cas, il serait grand, la moyenne étant voisine de zéro et le possesseur du revenu unique s'en éloignant considérablement.

Ces réflexions fournissent à cette étude son plan:

1) Il s'agit de démontrer que la courbe de Lorenz est indépendante, dans son ensemble, d'un indice de valeur centrale.

2) Il faut la montrer variable avec un indice de dispersion bien connu et lier ces deux variations dans une formule qui permettra de mesurer la sensibilité de la courbe.

Nous poserons l'hypothèse que les distributions de revenus considérées obéissent à la loi de Galton ou logarithmico-normale, hypothèse justifiée dans le cas présent. On sait que la probabilité d'un revenu compris entre t et t + dt est alors donnée par la formule: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp. - \frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2} \frac{dt}{t}$, μ et σ étant des caractéristiques de valeur centrale et de dispersion de la distribution considérée.

Les équations paramétriques de la courbe de Lorenz sont alors:

$$x = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$y = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} dz$$

On constate que ces équations sont indépendantes de μ, c'est-à-dire de la moyenne des logarithmes des revenus, ce qui répond à la première question.

Ce nombre μ peut d'ailleurs être estimé par la somme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log t_i$$

n étant le nombre d'observations dont on dispose, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{n} \log \left(\prod_{i=1}^{n} t_i \right)$$

$$= \log \sqrt[n]{t_1 \, t_2 \ldots . t_n}$$

La courbe est donc indépendante dans son ensemble de

$$\sqrt[n]{t_1 \, t_2 \ldots . t_n}$$

On peut énoncer: *la courbe de Lorenz ne dépend pas, dans son ensemble, de la moyenne géométrique des revenus* et l'augmentation, certaine, en moyenne, des revenus canadiens de 1947 à 1957 n'a donc pas pu affecter beaucoup la courbe de Lorenz.

En ce qui concerne la seconde question, on peut lier une variation de l'ordonnée d'un point de la courbe de Lorenz à une variation de σ, écart-type des logarithmes des revenus.

On trouve en différenciant y sous le signe somme que pour une variation $\triangle\sigma$ de ce dernier, on obtient une variation maximum $\triangle y$ de l'ordonnée telle que

$$\triangle y \simeq - 92\, \triangle\sigma$$

Le signe – montre bien que, si la dispersion des revenus autour d'une moyenne augmente, l'ordonnée du point correspondant de la courbe diminue; autrement dit, la dispersion des revenus va de pair avec l'égalisation des revenus.

De plus, on constate que cette formule s'applique bien à l'exemple étudié: de 1947 à 1957, l'écart-type a diminué de 0.028, ce qui donne une augmentation de l'ordonnée de 2.5 environ. Sur un graphique dont l'unité serait de 2 mm, cela donnerait une variation maximum de l'ordonnée de 5 mm, ce qu'on vérifie.

Ici, de nouveau, on peut lier cet indice de dispersion un peu abstrait à un indice plus connu. En effet, dans notre hypothèse, la probabilité élémentaire d'un revenu est:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[- \frac{(\mathrm{Log}t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{dt}{t}$$

Le revenu moyen est donc:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t \exp\left[- \frac{(\mathrm{Log}t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{dt}{t}$$

on pose $$\frac{\mathrm{Log}t - \mu}{\sigma} = z$$

et l'intégrale précédente devient:

$$\mathrm{M} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[- \frac{(z - \sigma)^2}{2}\right] dz$$

$$\mathrm{M} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

De même, le moment d'ordre 2 de la distribution est:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^2 \exp\left[- \frac{(\mathrm{Log}t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \frac{dt}{t}$$

Le même changement de variable transforme cette intégrale en la suivante :

$$e^{2\mu+2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[- \frac{(z - 2\sigma)^2}{2} \right] dz$$
$$= e^{2\mu+2\sigma^2}$$

La variance vaut donc :

$$S^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \right)^2 = e^{2\mu+\sigma^2} \left(e^{\sigma^2} - 1 \right)$$

et l'écart-type :

$$S = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

en sorte que le coefficient de variation est :

$$V = \frac{S}{M} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

il ne dépend que de σ et on en conclut que : *la variation de la courbe de Lorenz est liée à celle du coefficient de variation de la distribution considérée.*

Et ceci montre que, en définitive, la courbe de Lorenz est peu sensible car on observe, dans la pratique, que le coefficient de variation d'une distribution est à peu près constant, évolue peu avec la distribution, et on utilise même cette propriété pour simplifier des calculs statistiques.

La courbe de Lorenz est donc une courbe assez stable, et si l'on veut s'en servir, il faut un graphique soigné et à grande échelle.

Claude TRICOT,
professeur à l'École des Hautes Études commerciales (*Montréal*).