Revue des sciences de l'éducation

L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique

René Berthelot et Marie-Hélène Salin

Volume 22, numéro 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI : https://id.erudit.org/iderudit/031887ar
DOI : https://doi.org/10.7202/031887ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 417–442. https://doi.org/10.7202/031887ar

Résumé de l'article

Cet article présente un exemple d'utilisation de la méthodologie des situations didactiques pour identifier un obstacle didactique dans un problème d'enseignement des mathématiques: il s'agit de l'enseignement du concept d'angle de secteur aux élèves entre 10 et 13 ans. En s'appuyant sur l'analyse d'erreurs faites par les élèves, les auteurs reprennent à leur compte l'identification d'une conception erronée de l'angle déjà formulée par Balacheff. Ils proposent une explication à la production de cette conception par l'enseignement usuel et présentent de manière détaillée un processus d'enseignement qu'ils ont élaboré et qui permet aux élèves de surmonter cet obstacle.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 417 à 442

L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans: identification d'un obstacle didactique

René Berthelot
Enseignant

Marie-Hélène Salin
Enseignante

Institut universitaire de formation des maîtres d'Aquitaine

Résumé – Cet article présente un exemple d'utilisation de la méthodologie des situations didactiques pour identifier un obstacle didactique dans un problème d'enseignement des mathématiques: il s'agit de l'enseignement du concept d'angle de secteur aux élèves entre 10 et 13 ans. En s'appuyant sur l'analyse d'erreurs faites par les élèves, les auteurs reprennent à leur compte l'identification d'une conception erronée de l'angle déjà formulée par Balacheff. Ils proposent une explication à la production de cette conception par l'enseignement usuel et présentent de manière détaillée un processus d'enseignement qu'ils ont élaboré et qui permet aux élèves de surmonter cet obstacle.

Introduction

Cette étude présente un exemple d'utilisation de la méthodologie des situations didactiques[1] pour identifier un obstacle didactique dans un problème d'enseignement des mathématiques. Il y a problème d'enseignement lorsque des difficultés récurrentes se présentent aux élèves et aux professeurs. Dans certains cas, ces difficultés peuvent être attribuées à des connaissances inadéquates des élèves et sur lesquelles l'enseignement dispensé ne semble pas avoir de prise. Brousseau (1989) qualifie d'obstacles cognitifs ces connaissances qui produisent des réponses adaptées dans un certain contexte fréquemment rencontré, mais qui engendrent des réponses fausses hors de ce contexte. Il propose d'en distinguer plusieurs types suivant leur origine, dont nous rappelons brièvement les quelques différences essentielles:

- il y a obstacle ontogénétique lorsque les connaissances en cause sont des connaissances spontanées, apparaissant au cours du développement de l'enfant;

- il y a obstacle épistémologique lorsque la connaissance en cause a joué un rôle dans le développement historique d'un concept;

- il y a obstacle didactique lorsque la connaissance qui fait obstacle a été introduite par le processus d'enseignement lui-même.

Pour identifier un obstacle didactique, la première étape consiste à repérer, dans les réponses des élèves à des questions portant sur le concept enseigné, une ou des connaissances potentiellement productrices de leurs erreurs. La seconde, à s'assurer que l'obstacle n'est ni ontogénétique ni épistémologique. La troisième, à mettre en relation l'enseignement donné et l'émergence de cette connaissance inadaptée. La dernière étape consiste à élaborer et à expérimenter un processus d'enseignement alternatif permettant aux élèves de surmonter cet obstacle dans des situations adidactiques[2].

Les difficultés des élèves dans l'appropriation du concept d'angle (de secteur)

Les enseignants de sixième et de cinquième (dont les élèves ont de 10 à 13 ans) désignent cette notion comme ne «passant» pas auprès des élèves. Nous nous attacherons ici à rassembler les résultats de difficultés d'élèves, résultats que nous nous emploierons ensuite à relier à un problème d'enseignement.

Une enquête en Angleterre menée par Close (1982)

Parmi les items proposés par cet auteur à 87 enfants de sixième avant un nouvel enseignement sur les angles, trois concernent la comparaison de paires d'angles égaux, mais de longueurs de côtés différentes[3]. Dans ces trois items, la réponse erronée correspondant à l'angle ayant soit un, soit les deux côtés les plus longs est fournie par plus du tiers des élèves qui répondent à la question[4] (soit une vingtaine sur 65) (annexe 1).

Des résultats d'évaluation des programmes français: évaluation du programme de mathématiques[5]

En 1987, l'évaluation est mise au point pour la fin du niveau de sixième. Quelques questions concernent les angles. Parmi celles-ci, nous en avons retenu deux (voir Annexe 2) où il faut tracer la bissectrice d'un angle dans deux conditions différentes:

- l'angle est représenté par une figure prototypique de deux segments de même origine; la réussite est alors de 69 % (Item EXA18);
- il s'agit de l'angle BAC d'un triangle. La réussite est de 28 %, il y a 25 % de non-réponse et voici comment les auteurs décrivent les autres réponses: «Nombre de dessins traitent d'un autre angle que celui qui est demandé, habituellement le plus grand, B, sans d'ailleurs, en général, donner sa bissectrice. Le tracé est souvent celui d'une demi-droite issue de B non identifiable avec une hauteur ou une médiane» (Item EXC4).

Dans les deux items, l'orientation et la taille de l'angle sont similaires.

Cette différence de résultats nous incite à penser que ce qui est en cause est davantage le concept d'angle que celui de bissectrice: près de trois quarts des élèves ont beaucoup de mal à lui donner du sens quand il n'est pas présenté sous sa forme «primitive», c'est-à-dire scolaire, et à être capable de le reconnaître comme sous-figure d'une autre figure.

En 1988, une évaluation est mise au point pour la fin du niveau de cinquième. Quelques questions concernent les angles. Dans l'item C26 (Annexe 2), il faut reproduire un parallélogramme dessiné en utilisant «un angle» déjà tracé. Les élèves réussirent à 55 %, mais une des erreurs signalée comme la plus fréquente est la suivante: «Les demi-droites déjà tracées ont souvent été prises comme les côtés du nouveau parallélogramme qui, lorsqu'il est tracé correctement, n'a cependant pas les mêmes mesures que le modèle». Ceci atteste de la prégnance des difficultés de ces élèves à dissocier les côtés de l'angle de ceux du parallélogramme.

L'interprétation de ces difficultés en termes d'obstacle cognitif d'origine didactique

Les résultats précédents concordent avec ceux de plusieurs autres recherches. Nous empruntons à Balacheff (1988) la formulation suivante d'une conception de l'angle, productrice des réponses erronées pointées ci-dessus et résistant à l'enseignement usuel: «L'angle est conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts. Avec une telle conception, deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent apparaissent comme représentant deux angles différents».

Cette conception est attestée par certains ouvrages anciens d'enseignement de la géométrie, cités par Berdonneau (1981). Par exemple, dans le cours de Colin et Girod (1910), on lit: «La grandeur d'un angle dépend de leur écartement et non de la longueur des côtés qui le déterminent». Les données de l'épistémologie génétique (Piaget, Inhelder et Szeminska, 1948, p. 213-256) nous permettent de réfuter le caractère ontogénétique de cet obstacle pour des enfants de 11 ans. Quant à l'existence de la conception que nous étudions, dans l'histoire des mathématiques, elle est inconcevable, car elle rendrait inopérante la notion elle-même. Il est donc très probable que cet obstacle soit d'origine didactique, c'est-à-dire produit par les choix effectués par l'enseignant pour introduire ce concept.

Pour élaborer un processus didactique de remplacement, il nous a fallu comprendre cet obstacle, c'est-à-dire le relier à une analyse des conditions de l'enseignement usuel qui en explique la production durable. C'est ce que nous évoquons rapidement dans le paragraphe suivant. (Pour une information approfondie, notamment sur l'étude des représentations spontanées et de leurs fonctions dans l'enseignement obligatoire, voir Berthelot et Salin, 1992.)

L'enseignement usuel du concept d'angle et ses conséquences

L'efficacité immédiate recherchée dans la communication didactique, à propos de la géométrie, conduit l'enseignement à privilégier l'ostension de «figures». Ceci explique la présentation la plus fréquente choisie par les enseignants de l'école élémentaire et du collège pour les angles (de secteur) qui consiste à montrer une espèce d'objet, bien isolé, que nous pouvons décrire par le tracé, sur le tableau ou sur la feuille de papier, d'une paire de segments ayant une extrémité commune et des supports distincts.

En se fondant sur une soi-disant évidence perceptive, l'enseignement attribue implicitement un grand rôle aux représentations spontanées que les élèves ont de l'espace. Or, l'étude de ces représentations spontanées nous a permis de faire apparaître le décalage qui existe entre les représentations sur lesquelles l'enseignement s'appuie et les notions géométriques visées.

L'hypothèse de la représentation microspatiale

Nos travaux nous ont permis de conforter l'hypothèse, formulée par Brousseau (1983), de l'existence, chez les élèves comme chez de nombreux adultes, d'une représentation spontanée hétérogène[6] de l'espace. Nous n'évoquons ici que la composante microspatiale, pertinente pour cet exposé, produite par l'expérience des manipulations des petits objets dans l'espace de préhension de la vie courante.

Dans cette composante microspatiale, les notions centrales sont celles d'objets et d'espacement. Deux objets sont distincts si on peut les séparer par un espace(ment), annulable dans l'instant. Les objets sont nécessairement de dimension finie.

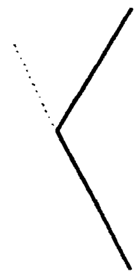
Le conflit entre la notion microspatiale d'objet et la notion géométrique

Nos résultats nous permettent d'avancer la conjecture suivante: lorsque les principales caractéristiques des rapports entre les sujets et l'espace peuvent être assimilées à celles des rapports usuels de manipulation des objets de petite taille, les élèves font principalement appel à cette représentation microspatiale, interprétant les figures géométriques comme des objets du microespace, munis des propriétés (et des limitations) correspondantes.

Ainsi en est-il pour l'angle, que les élèves conçoivent avec les propriétés liées à ce type de rapport: une «forme, caractérisée en particulier par son contour, de longueur déterminée» et non par les relations logiques de la géométrie.

Ces quelques paragraphes illustrent, par l'exemple de l'angle, un phénomène bien plus général: l'effet de la représentation microspatiale sur l'apprentissage de la géométrie quand l'enseignement s'appuie principalement sur des rapports à l'espace qui activent cette représentation.

Pointons, à titre d'illustration de cet élargissement de notre propos, une difficulté des jeunes élèves, décrite par Simmons et Cope (1990), rencontrée dans la détermination du déplacement de la tortue Logo selon un tracé polygonal préalablement déterminé. Un premier côté ayant été tracé, il s'agit de déterminer la direction du côté suivant, avant de le tracer. L'angle qu'il s'agit de concevoir est différent de celui qui est associé habituellement au tracé; son premier côté n'est pas tracé, il faut l'imaginer dans le prolongement du dernier déplacement de la tortue.



La prégnance de la représentation microspatiale dans les rapports à un espace de petite taille est, selon nous, la principale raison du choix erroné, fait par les élèves, de l'angle dont les deux côtés sont représentés.

L'ingénierie

Nous allons maintenant examiner le dernier volet de notre argumentation avec la présentation du processus d'enseignement et de ses résultats. Le processus complet comprend cinq séances ainsi réparties comme suit.

- Deux séances sont consacrées à l'exploration du problème spatial, à l'issue desquelles une première conception de l'angle de secteurs est dégagée, comme outil pour décrire certaines propriétés de polygones. La représentation usuelle de l'angle par une paire de segments de même origine et la comparaison des angles par superposition ont pris du sens dans la situation.
- Une séance de réinvestissement de ces différents outils dans un contexte différent, plus traditionnel, conduit à une première décontextualisation de la notion et à l'introduction d'un rapporteur à aiguille non gradué.
- Une séance de bilan et le débat qui suit la mise en commun des réponses permettent aux quelques élèves qui ont investi la conception erronée de l'angle, comme paire de segments, de la rejeter.
- Une dernière séance de reproduction d'un pentagone confronte les élèves au problème de la reproduction d'angles tels qu'on les rencontre dans un contexte géométrique usuel.

Nous illustrons maintenant notre méthodologie en présentant la démarche d'élaboration du processus, le contenu détaillé des deux premières séances, les résultats obtenus et ceux du bilan de la quatrième séance.

La construction du processus d'enseignement

Ce processus a été élaboré dans le cadre plus général de notre recherche sur l'enseignement de la géométrie. Dans ce cadre, nous mettons au point des situations d'apprentissage qui visent la construction de certains concepts clés de la géométrie comme des connaissances nécessaires au contrôle de situations spatiales, avant de les développer comme des savoirs de géométrie.

— Le choix des problèmes spatiaux permettant l'exploration effective des élèves

Les problèmes sur lesquels nous cherchons à baser nos situations d'apprentissage doivent pouvoir être dévolus à des élèves qui n'ont pas encore reçu d'enseignement sur les angles. Toutefois, leur résolution doit nécessiter l'élaboration de la notion d'angle, dans un premier temps comme modèle implicite dans une situation d'action, puis comme modèle explicite[7] dans une situation de formulation. De plus, il doit être possible de choisir les valeurs de certains paramètres de ces situations pour constituer un champ de problèmes sur les angles qui couvre au minimum les apprentissages que l'institution scolaire fixe comme objectifs aux élèves. L'ensemble de ces conditions relève de ce que Brousseau (1983) a appelé une «situation fondamentale».

Le choix de ces problèmes est d'autant plus délicat que trois conceptions de l'angle coexistent à l'école primaire:

- le secteur angulaire, ensemble des points situés entre deux demi-droites (une paire de demi-droites définit deux secteurs, un saillant et un rentrant);
- l'angle de secteur, classe de secteurs isométriques (superposables), représenté par des secteurs particuliers;
- l'angle de rotation, ou angle d'un couple de demi-droites, que l'on rencontre lorsqu'on parle du changement de direction d'un véhicule ou dans le déplacement de la tortue Logo.

L'examen des pratiques de la vie courante révèle bien quelques situations qui peuvent être décrites par l'une ou l'autre de ces conceptions. Par exemple, l'angle de tir du football se décrit bien avec le secteur angulaire, tandis que le réglage du rétroviseur de la voiture se fait plutôt en terme de rotation, etc. Cependant, le traitement de ces problèmes en termes géométriques est très complexe, ces situations font intervenir bien d'autres maîtrises au moins aussi problématiques (souvent motrices) et/ou se résolvent par des suites d'essais-erreurs qui évitent le passage par une maîtrise conceptuelle.

Nous avons donc recherché des situations dans deux directions: celle des phénomènes astronomiques, basés sur le repérage des positions du soleil par exemple, et celle de problèmes ne mettant en jeu que de petits objets. L'approche astronomique met en œuvre une grande complexité de représentations et de notions, trop grandes[8] pour un travail sur le seul concept d'angle. Nous avons donc fait le choix d'un travail sur des petits objets, faciles à introduire de manière ponctuelle dans la classe, et proches en cela de la situation usuelle d'enseignement qui produit l'obstacle. Nous nous sommes arrêtés à la situation que nous avons nommée «géométriscrabble».

— La situation du «géométriscrabble»

Le matériel – Il est constitué de pièces découpées dans du carton, de forme polygonale, convexes ou non; elles sont conçues de telle manière qu'il existe au moins une solution au problème posé par leur assemblage, en utilisant la règle suivante: deux côtés de la $n^{ième}$ pièce à poser doivent toucher deux côtés du polygone formé avec les $n - 1$ pièces déjà posées. Cette condition n'a aucune chance d'être réalisée si la forme des pièces est choisie au hasard; en revanche, elle l'est d'emblée si les pièces sont découpées dans un polygone quelconque comme dans l'exemple de la figure 1 (annexe 3). Toutefois, ce découpage doit être calculé pour répondre à un certain nombre de contraintes liées aux objectifs des situations; nous le présenterons donc de manière plus détaillée après avoir décrit et analysé ces dernières.

La procédure de jeu du «géométriscrabble» – Un jeu de n pièces polygonales est commun à p joueurs. Deux des pièces sont posées sur la table et deux de leurs côtés ont une partie accolée, suivant une configuration déterminée à l'avance; les autres pièces sont distribuées aux joueurs. À tour de rôle, chacun se procure une pièce de son lot et peut la poser si elle s'accole, sans chevauchement, le long de deux de ses côtés, à deux côtés du polygone formé par les pièces déjà assemblées. Sinon, le tour passe au joueur suivant. Le premier qui s'est débarrassé de ses pièces a gagné. Examinons quelques variables didactiques[9] de cette situation.

Les variables didactiques – Les variables didactiques concernent les contraintes d'assemblage pièce-emplacement, les conséquences pour le matériel et diverses autres variables didactiques de ce jeu.

Premièrement, on considère que l'assemblage pièce-emplacement se réalise sans contrainte lorsque chaque joueur, tirant au hasard une pièce, essaie de l'encastrer convenablement par essais-erreurs. Dans ces conditions, la réussite finale est liée à la qualité de l'exploration. Les joueurs doivent seulement être capables de déterminer si une pièce s'encastre bien ou non sur l'un de ses angles et, sinon, d'organiser de manière efficace, plus ou moins systématique, une recherche des emplacements ou des autres angles de la pièce possibles. La comparaison des angles est prise en charge par le matériel; elle n'a pas à être anticipée.

Deuxièmement, on considère que l'assemblage pièce-emplacement se fait avec anticipation lorsque chaque joueur tire une pièce au hasard et doit prévoir à haute voix quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place. L'anticipation porte donc sur la reconnaissance par comparaison visuelle à distance d'une proximité de valeur entre un angle de la pièce polygonale et un angle extérieur du polygone constitué par l'assemblage.

Troisièmement, il est possible de procéder par communication graphique. Ceci est réalisé lorsque le lot des pièces n'est plus à la disposition du joueur E (émetteur) qui va les placer, mais d'un autre R (récepteur). E (qui ne connaît pas les formes ni les dimensions précises des pièces du lot) doit donc fournir à R une information qui lui permet de trouver une pièce convenable. Pour cela, il dispose d'un crayon et d'une feuille de papier et peut avoir recours à tout instrument qui lui paraît nécessaire. Que peut alors faire E, si R ne peut lui donner d'information sur son lot en cours de partie?

La solution la plus économique consiste à reproduire, sur la feuille, par superposition, un angle extérieur du polygone déjà formé en demandant au marchand de lui fournir une pièce ayant une partie se superposant à cet angle. Cette solution suppose que E et R soient capables de donner du sens à cette figure nouvelle, constituée de deux segments ayant une extrémité commune, c'est-à-dire de concevoir qu'elle permet de représenter la propriété que doit posséder la pièce nécessaire à la poursuite du puzzle.

Une autre forme de cette connaissance est de désigner l'angle par trois longueurs déterminant un triangle construit sur ses deux côtés. En l'absence de conventions entre joueurs et marchand et de connaissances préalables sur les angles, cette stratégie est plus coûteuse que la précédente.

Si ces connaissances ne sont pas disponibles, on peut prévoir deux autres stratégies.

Première stratégie – L'enfant émetteur peut dessiner ou décrire une pièce polygonale, anticipant une forme possible, avec ou sans recours à la superposition. L'échec probable du marchand à trouver cette pièce peut conduire celui-ci soit à affirmer qu'il ne peut répondre à la demande, soit à rechercher une pièce qui ait un angle superposable avec l'un de ceux de la pièce dessinée. Dans un cas comme dans l'autre, la rétroaction de la situation doit inciter l'élève émetteur à modifier l'information transmise et à ne dessiner que les traits pertinents de la pièce qu'il désire.

Deuxième stratégie – Le joueur peut aussi dessiner par superposition le polygone déjà constitué et demander une pièce pouvant s'encastrer convenablement à l'endroit qu'il désigne, puis compléter son dessin, la pièce une fois posée, pour commander la suivante. Cette solution, si elle est considérée comme aussi efficace que la représentation d'un angle, n'incitera en rien les élèves à «décanter» l'angle du contour polygonal. Aussi, il faut trouver le moyen de la rendre plus coûteuse que l'autre, par le biais de l'organisation de la situation.

Tout cela a des conséquences pour le matériel. En effet, pour que les variables ci-dessus puissent déterminer des jeux où chaque joueur puisse «jouer» plusieurs fois, il faut assurer à chaque pièce une pluralité de placements possibles. Ceci est réalisé en choisissant pour angles des pièces des multiples de 30 degrés.

Il faut enfin prendre en compte d'autres variables didactiques de ce jeu, dont la convexité des pièces et la règle d'assemblage.

La première variable concerne la nature des pièces: si toutes sont convexes, le concept d'angle risque d'être associé chez les enfants à celui de saillant, alors que le déroulement du jeu n'est pas affecté par ce caractère. En revanche, si, parmi les pièces, il y en a qui ont à la fois des angles rentrants et des angles saillants, il faudra trouver un moyen de différencier les deux types dans le message. La figure 2 (annexe 3) présente un exemple d'état possible du puzzle, après la pose de la moitié des pièces.

La seconde concerne la règle d'assemblage des pièces. Telle qu'elle est énoncée ci-dessus, des configurations comme sur la figure 3 (annexe 3) sont possibles, c'est-à-dire des puzzles avec trou. Elles pourraient être intéressantes pour généraliser la notion d'angle à celle d'angle de deux demi-droites d'origines différentes. Si on veut éviter ce genre de configuration, il suffit de préciser, dans la règle, que deux côtés consécutifs de la pièce à poser doivent toucher deux côtés consécutifs du polygone déjà constitué.

Les premières séances du processus d'enseignement

Nous pouvons donc maintenant construire une suite de situations basées sur des jeux, dont les règles prennent en compte ces variables didactiques, et dont la maîtrise va provoquer la nécessité de connaissances différentes sur l'angle, connaissances de plus en plus élaborées.

— Première séance «établissement d'un modèle implicite»

Première phase «établissement de la règle d'assemblage du jeu» (10 min) – L'enseignant introduit le jeu par une «partie» jouée au tableau, devant tous les élèves. Il montre la règle d'assemblage, en la faisant réaliser quelques fois. Les élèves sont par groupes de trois, chaque groupe dispose d'un jeu de 20 pièces. Ils en tirent deux, qu'ils posent sur la table en les accolant par un côté; puis, ils se partagent les 18 pièces restantes. «Chaque joueur tire au hasard une pièce, il essaie de l'encastrer convenablement; s'il échoue, il replace la pièce dans son lot, s'il réussit, il la laisse posée; dans les deux cas, le tour continue.» Le jeu est arrêté quand chaque équipe a fait deux parties et l'on passe sans autre bilan au jeu suivant.

Deuxième phase «anticipation visuelle» (40 min) – L'enseignant annonce: «Vous allez rejouer avec ce matériel, mais les règles vont être différentes. Une fois la distribution faite, chacun cache ses pièces dans l'enveloppe distribuée. Une fois que le joueur a tiré une pièce, il doit prévoir et annoncer à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place. Nous allons faire ensemble un début de jeu au tableau.» Le maître fixe au tableau les deux pièces du départ et appelle deux élèves. Le premier tire et prévoit, puis le second, puis le maître. Au fur et à mesure, en fonction de ce qui se passe, l'enseignant énonce les règles suivantes:

- «si le joueur prévoit bien, c'est au suivant de jouer. S'il prévoit mal (l'angle de la pièce indiqué ne s'adapte pas à l'endroit indiqué), il perd son tour et remet sa pièce dans l'enveloppe;
- si le joueur dit qu'il n'y a pas de place pour sa pièce, il le vérifie. Si c'est vrai, il remet sa pièce et en tire une autre, avec laquelle il rejoue. Si c'est faux, il remet sa pièce dans son lot et passe son tour. Le premier dont l'enveloppe est vide a gagné».

Quand tous les élèves ont joué deux ou trois parties, l'enseignant fait rapidement le bilan de celles gagnées ou perdues par chacun, mais sans insister. Il annonce que ces jeux préparent la leçon du lendemain.

— Deuxième séance «élaboration d'un modèle graphique»

Les élèves sont répartis par groupes de trois: deux joueurs émetteurs et un marchand. Les deux premiers sont côte à côte, ils tournent le dos au marchand. Ils disposent des objets suivants: une grande feuille de papier sur laquelle sont collées deux pièces du puzzle, formant un polygone connexe, polygone qu'ils doivent agrandir peu à peu, au fur et à mesure de leurs commandes au marchand; des feuilles de papier blanc assez minces pour les messages; un feutre.

Le marchand dispose de 9 nouvelles pièces: 6 d'entre elles ont des angles multiples de 30°, comme les 2 pièces déjà collées, 3 autres sont intruses, c'est-à-dire n'ont aucun angle multiple de 30°, mais leurs angles ont été choisis proches (5 à 10° environ) de ceux des 6 autres pièces. Ces pièces intruses, qui n'existaient pas dans les jeux précédents, ont pour but de mettre en échec, s'ils apparaissent, les messages comportant des dessins d'angles avec des côtés très courts.

Première phase – L'enseignant, après avoir décrit l'organisation des groupes et le matériel de chacun, continue ainsi: «Voici la règle du jeu: les trois élèves d'un même groupe sont associés, les huit groupes sont concurrents. Dans chaque groupe, un des émetteurs, chacun à son tour, commandera par un message, une pièce s'emboîtant à un endroit du puzzle désigné par lui à l'avance à l'aide d'un pion. Le marchand recevra le message et enverra la pièce commandée. Si le marchand n'a pas la pièce demandée, il le signale; les joueurs font une autre demande. Sinon, il fait parvenir une pièce correspondant à la demande. L'autre émetteur vérifiera si la pièce obtenue convient bien, c'est-à-dire si l'un des angles de la pièce reçue s'emboîte bien à l'endroit prévu. Si c'est bien le cas, la pièce est collée. Si ce n'est pas le cas, la pièce est renvoyée. Si l'un des angles s'emboîte bien, mais qu'il y a chevauchement d'une autre partie de la pièce, les joueurs peuvent demander une autre pièce au marchand. Au bout de 15 minutes, tous les groupes arrêtent leurs échanges, celui qui a collé le plus de pièces a gagné. Avant de jouer, les membres d'un même groupe doivent se concerter pour trouver un moyen de faire leur commande et que le marchand puisse comprendre».

L'enseignant leur donne environ 5 minutes, puis lance le jeu en distribuant le matériel. Il interrompt cette première partie au bout de 15 minutes, fait le bilan du nombre de pièces collées par chaque groupe.

Deuxième phase – L'enseignant annonce une deuxième partie avec un nouveau matériel et après qu'un des deux émetteurs ait remplacé le marchand. Si au moins un groupe de la classe a communiqué grâce à la représentation par superposition de tout le polygone, la consigne est légèrement modifiée pour rendre cette stratégie coûteuse en temps et inciter les enfants à en changer: après chaque commande efficace, le message est laissé au marchand. Un nouveau temps de concertation est donné aux groupes (mais il n'y a pas d'échange entre les groupes, l'évolution doit pouvoir se faire par une réflexion interne sur les difficultés rencontrées). Le jeu est arrêté après 10 minutes.

Troisième phase – La dernière phase est consacrée à un deuxième bilan et à la mise en commun des moyens utilisés et des difficultés rencontrées. Le jeu est donc arrêté et le travail porte ensuite sur l'explicitation et la comparaison des divers moyens de réaliser une commande efficace.

L'enseignant demande à un des élèves de venir au tableau donner un exemple de commande pour un angle désigné, il choisit un groupe dont le score est faible: soit parce qu'il n'a pas encore compris qu'on ne pouvait demander une pièce entièrement définie, soit parce qu'il dessine à chaque fois le puzzle tout entier. Si l'action n'a pas permis aux élèves concernés de comprendre l'échec de la première stratégie, les réactions des autres élèves du genre «On ne peut pas savoir s'il y a un triangle qui s'emboîte là» doivent les aider à en prendre conscience. La deuxième stratégie, comparée à celle qui consiste à représenter chaque angle choisi, doit apparaître comme trop lourde.

L'enseignant appelle ensuite deux élèves de deux groupes différents qui ont réalisé un message de même type (celui visé) pour un même angle[10] et demande comment on peut se rendre compte qu'ils correspondent bien au même angle: il attend la proposition de superposition des deux tracés et profite de ce moment pour introduire les termes de côtés et de sommet d'un angle. L'indépendance, pour la comparaison, de la longueur des côtés est alors explicitée.

Le maître demande ensuite quelles difficultés les élèves ont rencontrées et comment ils les ont surmontées. Devraient ainsi apparaître les ambiguïtés liées au fait qu'à un tracé correspondent deux angles, le saillant et le rentrant, et la solution du marquage de l'angle choisi.

Une première institutionnalisation[11] des angles comme propriété des polygones est réalisée.

Remarque – Le terme d'angle est utilisé dans deux acceptions par l'enseignant, au cours de la leçon: dans le sens culturel, au début, comme moyen de désigner une partie de la pièce, il est synonyme de «coin»; dans le sens mathématique, dans la troisième phase, quand il affirme que deux pièces de forme différente, mais qui peuvent s'encastrer au même endroit, ont un même angle. Cet abus de langage nous a paru impossible à éviter, d'autant plus que les élèves de CM2 utilisent couramment le terme d'angle droit pour caractériser certaines propriétés des quadrilatères.

Résultats et discussion

Relativement à la première phase de la première séance, ce premier jeu permet aux enfants de se familiariser avec le matériel en faisant attention à placer convenablement les pièces qui ont tendance à glisser et de recevoir du maître des réponses aux questions (sur la règle) qu'ils se posent au fur et à mesure du déroulement de la première partie: «Peut-on retourner les pièces?», «Est-ce qu'il faut que cela fasse une forme particulière?», «Tout s'emboîte bien mais il y a un trou dans le puzzle, est-ce que je peux poser ma pièce ainsi?». Une fois les réponses aux questions bien comprises par les enfants, cette phase est arrêtée puisque le jeu ne fait plus alors intervenir que le hasard; elle remplit bien son rôle et dure environ 10 minutes.

La deuxième phase de la première séance vise l'élaboration d'un modèle implicite; les nouvelles règles du jeu commandent le modèle de comparaison à l'œil des angles de la pièce tirée dans les angles extérieurs du puzzle déjà formé. Nous avons remarqué:

- des différences individuelles très grandes quant à la capacité à explorer le puzzle et la pièce; certains enfants tiennent la pièce dans la main et ne s'intéressent qu'aux angles qu'ils ont sous les yeux, sans penser à la faire pivoter;
- des différences également importantes quant à l'évaluation à l'œil de la taille des angles;

- que la vitesse de déroulement du jeu est très variable: certains en sont à la troisième partie quand d'autres n'ont pas fini la première. Toutefois, cette lenteur, liée à un manque de méthode, ne semble pas constituer un handicap pour la suite des leçons;
- que le langage utilisé par les élèves est très pauvre puisqu'ils ont la possibilité de montrer: «Ça, ça rentre là». Nous avons toutefois relevé l'usage du mot «coin», ainsi que du terme «angle droit» dans des cas où, en effet, la pièce comportait un tel angle.

La troisième séance vise à établir le tracé d'un angle comme modèle graphique de la situation. Considérons maintenant les stratégies développées par les élèves. Comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*, elles peuvent être classées en deux grandes catégories, celles qui témoignent d'une certaine décantation de la notion d'angle (Wermus, 1976) et celles qu'utilisent les élèves qui ne peuvent concevoir qu'on puisse décrire une pièce répondant à la question sans donner toutes ses caractéristiques. Précisons-les en les désignant par des lettres pour pouvoir les repérer.

Stratégie A1 demande d'une pièce par le nom de sa forme, sans autre précision.

Stratégie A2 demande d'une pièce, le plus souvent un triangle permettant de rendre convexe le puzzle, en fournissant comme informations les mesures des côtés. La description peut être accompagnée d'un dessin fait à l'œil ou respectant certaines mesures de longueur.

Stratégie A3 utilisation de la feuille comme calque et reproduction du puzzle entier par superposition.

Stratégie A4 choix d'un angle parce qu'il est droit et demande d'une pièce ayant un angle droit sans préciser sa forme.

Stratégie A5a représentation d'un angle du puzzle à l'œil avec indication des mesures des côtés.

Stratégie A5b représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant, avec indication des mesures des côtés.

Nous avons regroupé ces deux stratégies sous un même nom A5, car elles manifestent la possibilité pour l'élève de représenter le seul caractère pertinent de la figure, à ce moment.

Stratégie A6 représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme Ab), mais les longueurs sont seulement respectées sans être indiquées.

Stratégie A7 représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme Ab), mais sans respecter ni indiquer les longueurs des côtés.

Nous avons relevé chaque année deux ou trois enfants qui proposent, pour désigner l'angle demandé, de déterminer sur chacun des côtés deux points à 1 cm du sommet et de mesurer la distance entre ces deux points. Cette procédure était vite abandonnée, car difficile à expliquer par écrit au marchand! Elle pourrait constituer la base de la procédure de reproduction d'un angle à la règle et au compas. Nous ne l'avons pas exploitée, car elle semble trop minoritaire.

Pour chacun des groupes, nous avons pu relever tous les messages et, pour quelques-uns, observer les réactions des marchands et les échanges avant chaque jeu.

En résumé, lors du travail par groupes, la majorité des groupes utilise dans les premiers échanges soit A2 soit A4. Étant donné le puzzle initial, A4 permet de réussir pour deux pièces; ensuite, il n'y a plus d'angle droit rentrant dans le puzzle. Les élèves se retrouvent dans la même situation que ceux qui n'ont pas remarqué l'existence d'angle droit. Toutefois, la proportion de ceux qui régressent vers A2 est plus faible que celle de ceux qui adoptent une procédure d'indice supérieur ou égal à 5[12].

Comme nous nous y attendions, l'impossibilité de fournir une pièce correspondant à une forme bien déterminée déstabilise les enfants, plus ou moins vite. Nous avons constaté que certains groupes, après avoir déclaré dans la discussion initiale que les longueurs des côtés n'étaient pas importantes, qu'on ne pouvait pas savoir la forme de la pièce, faisaient leur première demande en utilisant A2.

À l'issue du deuxième jeu, 11 groupes sur les 15 étaient passés à une procédure de type A5, A6 ou A7, A5a étant utilisé par un seul groupe; 6 groupes avaient attribué l'échec de certains messages à l'ambiguïté du tracé ne permettant pas de savoir «s'il fallait envoyer une pointe ou un creux» et avaient mis au point des solutions (flèches, estompage de la partie pleine, etc.). La formulation «où on peut faire rentrer un angle droit» a été utilisée par un groupe qui n'est pas sorti de la stratégie A4.

Quant aux groupes ayant utilisé A3, le changement de règle entre le premier et le deuxième jeu a suffi pour faire abandonner par deux groupes sur quatre cette procédure efficace, mais ne permettant pas d'engager le type de travail sur les angles que nous visions, pour leur faire adopter la procédure A6.

Par ailleurs, la phase d'échanges, en fin de leçon, commence par le bilan du nombre de pièces collées. L'enseignant interroge les enfants des quelques groupes qui n'ont réussi à coller qu'une pièce pour qu'ils viennent expliquer leurs difficultés.

Les groupes qui n'ont pas réussi à dépasser A4 ou A2 posent le problème: «Il n'y avait pas de pièce comme on voulait». Les autres groupes viennent expliquer leur méthode: «Nous, on a pris la trace de l'angle en superposant la feuille sur le puzzle», ce qui provoque dans l'une des classes une réaction indignée des élèves de deux groupes: «C'est de la triche!».[13]

Dans les deux classes, certains enfants sont revenus sur l'importance de prendre en compte ou non les mesures des «bords». Cela a été l'occasion pour l'enseignant d'une part d'introduire les termes de côté et de sommet d'un angle[14], d'autre part de préciser que, quand deux pièces ont un même angle, le sommet et les deux côtés de l'angle se superposent en partie, et qu'une même trace représente les angles des deux pièces.

Quelques élèves font remarquer qu'à une même trace correspondent deux sortes de pièce[15] et qu'ils ont trouvé le moyen de préciser laquelle ils désiraient. Ceci permet à l'enseignant d'expliciter qu'à une même trace correspondent deux angles, d'introduire les termes de saillant et de rentrant ainsi que la notation mathématique usuelle.

Ainsi, à la fin de la séance, une première institutionnalisation à propos des angles a été faite.

Résumé de la troisième leçon

Les angles n'y sont plus considérés en tant qu'outils pour résoudre un problème spatial, mais en tant qu'objets géométriques représentés, ils se rapportent toutefois à la situation vécue dans la leçon précédente; ce sont des représentations d'angles de pièces fictives à propos desquels la comparaison par superposition a déjà un sens. Il s'agit essentiellement de confronter les élèves, de manière individuelle, à un problème de comparaison d'angles tracés, par report sur un calque.

Évaluation des connaissances des élèves à l'issue de la série de trois séances

Au cours des trois leçons associées au jeu du «géométriscrabble», les élèves ont manifesté une progression dans la maîtrise du concept d'angle. L'évaluation, faite une semaine après, permet de contrôler ce qu'il en est pour chacun d'entre eux.

La correction du contrôle est l'occasion de revenir sur ces connaissances et sur leur explicitation. C'est à l'occasion de la correction du contrôle que le terme «d'angles égaux» est institutionnalisé, après une discussion sur les phénomènes liés à la longueur des côtés.

— Première épreuve (annexe 4)

C'est la plus proche de la situation adidactique. Elle comporte deux items du même type: prévoir si une pièce polygonale dessinée d'un côté de la feuille peut s'encastrer dans le puzzle dessiné de l'autre côté.

Pour répondre à la question, les enfants ont à leur disposition, à la demande, des règles, un double décimètre, du papier calque, mais pas de rapporteur dont l'usage, mal maîtrisé par tous à ce moment, pourrait masquer des difficultés sur la conception des angles. Il leur est demandé d'expliquer comment ils ont fait. L'analyse de ces explications peut permettre de voir dans quelle mesure ils réinvestissent leur connaissance des termes comme angle, superposer, etc.

Le premier point comporte deux solutions, un même angle (rentrant) de la pièce peut s'emboîter à deux endroits différents. Un «piège» a été prévu: un autre angle (saillant) de la pièce est égal à un angle saillant du puzzle. Le deuxième point ne comporte pas de solution, mais un des angles de la pièce est égal à un des angles du puzzle.

Sur 41 enfants, 39 ont réussi au premier point; 36, au deuxième. Tous ont utilisé le papier calque; pour les deux points, la grande majorité d'entre eux (34) ont décalqué les pièces entières; les autres, seulement les angles leur paraissant convenir. Un seul élève a confondu, dans le deuxième point, emboîtement et superposition des angles[16].

Dans leurs explications, peu d'enfants utilisent spontanément le terme d'angle, 9 seulement: 5 sur les 7 qui n'ont décalqué que les angles, et 4 sur les 34 qui ont décalqué les pièces entières. Telle qu'elle était posée (à dessein), la question n'appelait pas nécessairement une réponse en terme d'angles; il est normal que seuls, ou presque, l'aient employé ceux qui ont effectivement comparé des angles.

— Deuxième épreuve (annexe 5)

Deux triangles sont dessinés sur une même feuille; chacun des angles est désigné par une lettre. Les enfants doivent répondre à deux questions: Dans le triangle n° 2, y a-t-il un angle égal à l'angle Q du triangle n° 1? Si oui lequel?, Dans le triangle n° 1, y a-t-il un angle égal à l'angle T du triangle n° 2? Si oui lequel?

Aucune des deux réponses ne peut être donnée à l'œil, les mesures des angles concernés étant proches. Les deux angles égaux ont des côtés de longueur différente. Aucune explication sur le sens des termes «angle égal» n'est fournie d'emblée aux enfants. Si certains posent la question, l'enseignant doit répondre que cela veut dire superposable. Pour les deux questions, 35 enfants sur 41 réussissent, trois échouent aux deux.

— Troisième épreuve (annexe 6)

Un pentagone irrégulier est dessiné sur une feuille. À côté de chaque sommet est placée une lettre servant à désigner l'angle correspondant. Deux questions sont posées: Y a-t-il un angle égal à A? Si oui lequel?, Y a-t-il un angle égal à D? Si oui lequel?

La réponse attendue est oui (C) pour la première question. La réponse attendue est non pour la deuxième question.

Les côtés de A et de C sont de longueur différente, alors que ceux de D et de E dont la différence de mesure est environ de 5 degrés sont de même longueur.

Tous les enfants ont réussi la première question, huit ont échoué à la seconde ayant comparé à l'œil (3) ou pris un calque aux côtés très courts (2) ou mal contrôlé la superposition des côtés (3).

— Quatrième épreuve (annexe 7)

Elle a été construite pour pouvoir comparer les résultats des élèves avec ceux de Close (1982). Les enfants doivent répondre, pour 6 paires d'angles, à la question suivante: «Écris le nom du plus grand ou alors écris: "ils sont égaux"».

C'est la première fois que les enfants doivent répondre à une question de cette nature, les réponses précédentes portant sur l'égalité ou l'inégalité. Nous avons choisi des configurations pièges, comme celle de A et B, pour observer dans quelle mesure les élèves étaient capables de les éviter et de résister ainsi à l'obstacle décrit dans la première partie; la comparaison porte aussi sur un couple constitué d'angles rentrants.

En 1989-1990, les résultats aux 6 questions varient entre 76 et 93 %, en 1990-1991, entre 74 et 87 %[17]. Si nous examinons de plus près les résultats de 1990 et regroupons les enfants par le nombre de résultats justes, nous voyons que seuls quatre enfants ont moins de quatre réussites mais qu'une seule élève sur 41 n'a pas compris ce qui était en jeu dans la suite des activités[18].

Rappelons qu'un de nos objectifs était de faire la preuve que la conception de l'angle comme une paire de segments de même origine était le résultat d'un obstacle didactique, et que cette conception pouvait ne pas apparaître ou être rapidement transformée dans une autre approche. Les résultats présentés nous paraissent attester que nous avons bien atteint cet objectif.

Nous avons reproduit ce processus durant trois années, dans les classes de CM2 de l'école Michelet associée au COREM (Centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques). Nous avons conclu à sa reproductibilité et à son efficacité, relativement aux objectifs que nous nous étions fixés. Seule la durée à affecter à la deuxième leçon nous paraît être sujette à variation: selon la rapidité des élèves à s'approprier la représentation des angles du polygone à compléter par décalque, cette leçon nécessite une ou deux séances.

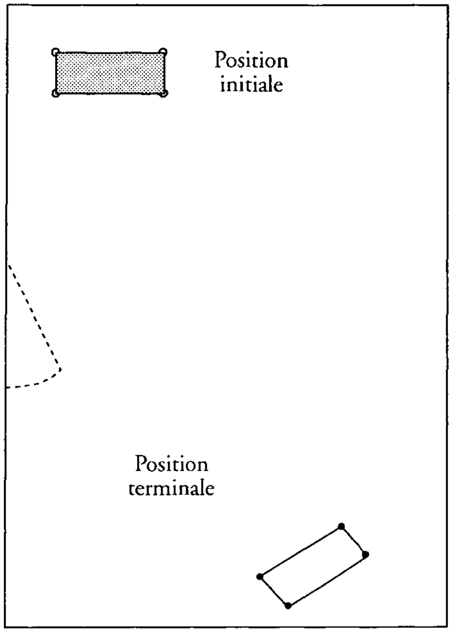
Nous insistons particulièrement sur le fait que, pour les élèves, le terme d'angle a du sens, aussi bien pour caractériser certaines propriétés d'une figure polygonale fermée[19] que pour désigner la figure formée par deux demi-droites de même extrémité. Ils ne connaissent pas ce terme, mais ils sont capables de traiter les côtés de la figure comme des demi-droites pour comparer les angles.

Les limites de l'approche réalisée

Avec les élèves de CM2 qui ont suivi l'enseignement décrit ci-dessus (processus complet), nous avons voulu explorer, sur l'exemple particulier de l'angle droit de secteur, les compétences obtenues dans la maîtrise de l'espace physique. Nous avons choisi une situation où la notion est liée à celle de rectangle, bien connue à cette étape de la scolarité.

La situation du «tapis de gymnastique»

Quatre pastilles marquent précisément la position au sol de quatre coins d'un tapis de sol de gymnastique (rectangulaire), posé à l'angle d'une pièce. Il s'agit de positionner à l'autre bout de la pièce, quatre pastilles de façon à anticiper les positions des coins du tapis de sol avant le déplacement du tapis. Une contrainte matérielle impose à la nouvelle position du tapis de ne pas être parallèle aux murs. Après vérification, par déplacement du tapis, un deuxième essai est proposé. Le matériel à la disposition des élèves consiste en une règle, une équerre de tableau, ainsi que de la craie et un double mètre. Le problème a été posé individuellement à chacun des 38 élèves de CM2 de l'école Michelet.



(Représentation, de type «vue de dessus»,
de la position des tapis par rapport à la pièce)

L'analyse a priori

L'angle droit et le rectangle peuvent constituer un moyen de réponse, mais leur mise en œuvre implique, pour guider efficacement l'action des sujets, un réinvestissement de l'acquis microspatial: dans un espace certes limité, mais de l'ordre de la taille des élèves; dans un espace avec lequel leurs rapports puissent se comparer aux rapports avec les grands espaces (macroespace). En effet, le concept d'objet s'insère ici dans une nouvelle architecture tissée autour des concepts de lieux et de point de repère. Pour réussir le positionnement des pastilles dans ces conditions, l'élève doit investir un modèle géométrique ou bien associer une ligne droite à chaque couple de pastilles et un angle à deux telles lignes issues de la même pastille, ou bien associer un rectangle, qu'il doit concevoir, à l'ensemble des quatre pastilles.

Les résultats

Après un premier essai et une vérification, tous les élèves mesurent les longueurs des côtés du tapis et reportent les mêmes valeurs pour déterminer les distances entre deux pastilles; tous également contrôlent l'égalité des distances entre deux couples de pastilles et positionnent la quatrième par tâtonnements. Sept élèves seulement contrôlent un angle droit entre les deux directions déterminées par trois pastilles consécutives, 31 constatent le décalage, mais l'imputent aux longueurs et ne savent pas comment le corriger (six d'entre eux essaient en vain de le faire à partir de la longueur des diagonales).

Les moyens ordinaires de l'enseignement usuel de la géométrie à l'école élémentaire ont permis aux élèves de convertir une longueur en distance dans un espace ayant certaines caractéristiques du mésoespace et du macroespace et n'ont pas permis d'atteindre, dans un tel espace et pour la majorité des élèves, des compétences de transfert, aux situations spatiales, de celles liées au tracé des angles de rectangle sur la feuille de papier.

Conclusion

Nous avons montré comment l'enseignement usuel produit un obstacle didactique à l'apprentissage du concept d'angle de secteur et comment éviter cet obstacle. Bien sûr, nos résultats ne portent que sur un faible effectif d'élèves. Ils sont cependant confirmés année après année.

La méthodologie des situations didactiques nous permet de comprendre l'origine de certaines des limites de l'enseignement usuel de la géométrie. Nous avons de bonnes raisons de penser que celles-ci sont attribuables à un enseignement qui s'appuie essentiellement sur des tracés «géométriques» sur la feuille de papier, tracés considérés comme des objets que l'on peut montrer et non comme des outils pour résoudre des problèmes spatiaux.

NOTES

1. Nous nous référons ici à la modélisation des situations d'enseignement développée sous l'impulsion de Brousseau.

2. À l'intérieur d'une situation didactique (donc organisée par le professeur pour l'enseignement d'une certaine notion), le terme de situation adidactique liée à un savoir S désigne toute situation qui sanctionne les décisions que prend l'élève (bonnes ou mauvaises), sans intervention du maître, et sur la seule base des connaissances familières des élèves (antérieures à S), et qui cependant ne peut être maîtrisée sans la mise en oeuvre de S (implicite ou explicite).

   Un lecteur enseignant restera sans doute un peu sur sa faim quant au processus d'enseignement communiqué dans cet article, ici limité aux deux premières séances. Ce lecteur en trouvera une description plus complète dans notre thèse ainsi que dans la revue *Grand N* (Berthelot et Salin, 1995).

3. Le quart des élèves ne répondent pas à ces questions; aussi, le taux de réussite est-il d'environ 40 %.

4. La consigne est la suivante: "*Quel est celui qui est plus grand que l'autre, ou ont-ils à peu près la même valeur?*"

5. Il s'agit d'épreuves conçues par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public et réalisées dans un grand nombre de classes par les professeurs volontaires. EVAPM5 désigne les épreuves de fin de cinquième (élèves de 12-13 ans).

6. Ces travaux ont prolongé ceux d'Acredolo (1981) introduisant, en plus du microespace (*small scale space*) et du macroespace (*large scale space*), une catégorie intermédiaire, le mésoespace. Voir Brousseau (1983) et Berthelot et Salin (1992, p. 91-125).
7. Ce sont des caractéristiques d'une situation adidactique associée à la notion d'angle.
8. Nous travaillons à l'heure actuelle sur ce plan, mais en visant une introduction à la géométrie et non au seul concept d'angle.
9. C'est un paramètre de la situation adidactique qui peut être modifié par l'enseignant et dont la valeur modifie la connaissance nécessaire à la solution ou à la hiérarchie des coûts des connaissances utilisables.
10. Un de ceux du polygone de départ, qui sont communs à tous les enfants.
11. On nomme ainsi le processus qui convertit une connaissance jusque-là sous le contrôle de sa fonctionnalité dans une situation en un savoir officiel, sous le contrôle de la culture.
12. Mais nos effectifs sont trop peu nombreux pour faire apparaître un résultat significatif.
13. Cette réaction a souvent été observée dans des situations où il s'agit «d'inventer». Le contrat didactique est déstabilisé, le permis et le non-permis ne sont pas prédéterminés par le maître et certains élèves, même n'ayant aucune difficulté sur le plan conceptuel, restent bloqués. On peut penser aussi qu'ils ont envisagé cette solution, mais qu'elle leur paraît si simple qu'ils n'imaginent pas que ce soit cela que l'enseignant attend.
14. Les enfants connaissent déjà l'emploi de ces deux termes dans le cas des polygones, ils ne le réutilisent pas spontanément dans ce contexte.
15. «Celles qui ont un angle qui sort, celles qui ont un angle qui mange»! Les expressions sont toujours très imagées!
16. En 1990-1991, lors d'une nouvelle réalisation du processus, cette erreur a été plus fréquente, elle correspond à 20 % des réponses.
17. L'ensemble de l'épreuve a été proposée l'avant-dernier jour de classe, ce qui peut expliquer la petite différence entre les deux années.
18. En 1990-1991, sur 54 élèves, un élève est en échec total, cinq ne maîtrisent convenablement que la relation d'égalité.
19. Nous n'avons pas eu la possibilité d'introduire la bissectrice. Il aurait été éclairant de comparer leurs résultats à ceux des élèves de sixième pour la question EX4 de EVAPM (voir la partie I).

Abstract – This article presents an example of a methodology of didactic situations as used to identify difficulties in teaching a mathematics problem. The problem examined relates to the teaching of the concept of angle to students aged 10 to 13 years. Based on an analysis of students' errors, the authors identify those errors in understanding the concept which were previously described by Balacheff. They propose that one explanation of the production of conceptual errors is the usual teaching methodology. The authors present a detailed description of their own teaching process which allows students to overcome these difficulties.

Resumen – Este artículo presenta un ejemplo de utilización de la metodología de situaciones didácticas para identificar obstáculos didácticos en un problema de matemático: la enseñanza del concepto de angulo de sector a alumnos de 10 a 13 años de edad. Apoyándose en el análisis de errores cometidos por los alumnos, los autores retoman la identificación de una concepción errónea de ángulo formulada por Balacheff. Los investigadores proponen una explicación de la producción de esta concepción en la enseñanza usual y presentan de forma detallada un proceso de enseñanza que permite a los alumnos superar este obstáculo.

Zusammenfassung – In diesem Artikel wird die Methode der didaktischen Situationen exemplarisch angewendet, um ein didaktisches Hindernis innerhalb des Mathematikunterrichts zu ermitteln: es handelt sich dabei um den Begriff des Sektorenwinkels bei zehn- bis dreizehnjährigen Schülern. Die Verfasser berufen sich auf die Analyse der von den Schülern gemachten Fehler und übernehmen die schon von Balacheff formulierte Idee eines falschen Winkelverständnisses. Sie binden den Ursprung dieses Verständnisses an den üblichen Unterricht und beschreiben dann ausführlich eine Unterrichtsreihe, die sie ausgearbeitet haben und die es den Schülern ermöglicht, dieses Hindernis zu überwinden.

RÉFÉRENCES

Acredolo, L. P. (1981). Small and large-scale spatial concepts in infancy and childhood. *In* Liben, Patterson et Newcombe (dir.), *Spatial representation and behavior across the life span* (p. 63-82). New York, NY: Academic Press.

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (1987). Évaluation du programme de mathématiques, fin de 6e. *Publication de l'APMEP, 66*, 115.

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (1988). Évaluation du programme de mathématiques, fin de 5e. *Publication de l'APMEP, 72*, 152.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège* (p. 395-464). Thèse d'université, Université de Grenoble I.

Berdonneau, C. (1981). Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement postélémentaire en France au vingtième siècle. Thèse de troisième cycle en Didactique des mathématique, Université de Paris VII.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse d'université, en Didactique des mathématiques, Laboratoire de didactique des sciences et des techniques, Université de Bordeaux I.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1995). Un enseignement des angles au cycle 3. *Grand N, 56*, 69-116.

Brousseau, G. (1983). Études de questions d'enseignement – Un exemple: la géométrie. *In Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, cahier 1982-1983* (p. 183-186). Grenoble: LSD IMAG, Université Joseph-Fourier.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits sociocognitifs et ingénierie didactique. *In* Actes du colloque international «Obstacle épistémologique et conflit sociocognitif» (dir.), *Constructions des savoirs – Obstacles et conflits* (p. 277-285). Montréal: Agence d'Arc.

Close, G. S. (1982). *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer age.* Maîtrise en science, Polytechnic of the South Bank, Grande-Bretagne.

Colin et Girod (1910). *Cours de géométrie.* Paris: Alcan éditeur.

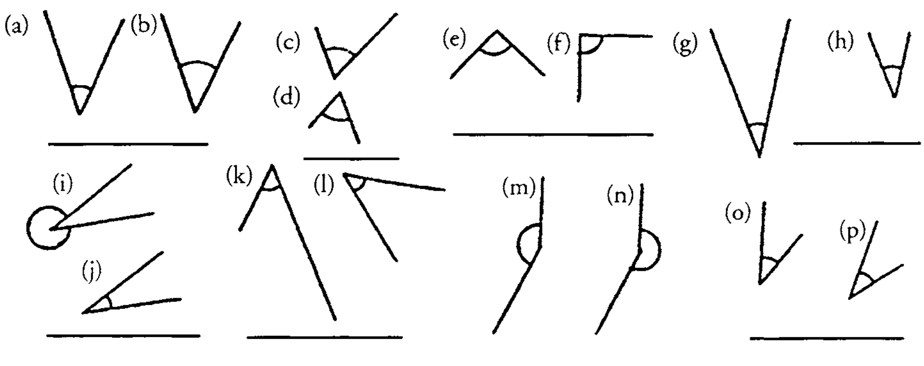
Piaget, J., Inhelder, B. et Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris: Presses universitaires de France.

Simmons, M. et Cope, P. (1990). Fragile knowledge of angle in turtle geometry. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 375-382.

Wermus, H. (1976). Essais de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. *Archives de psychologie, XIV*(171), 205-221.

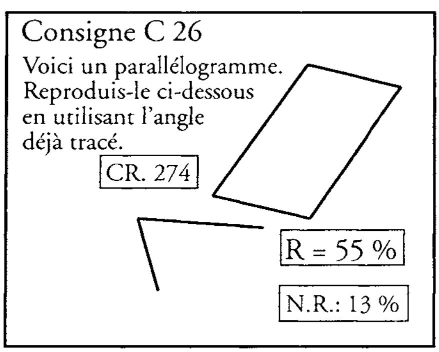
Annexe 1

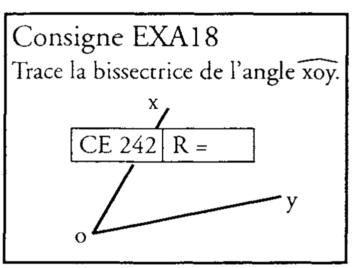
Quel angle est plus large ou qui est de même grandeur? Répondre à cette question pour chaque paire d'angles.

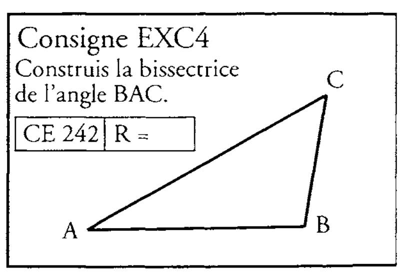


Réussites (c) (d) 30 % (g) (h) 44 % (k) (l) 42 %

Annexe 2







Annexe 3

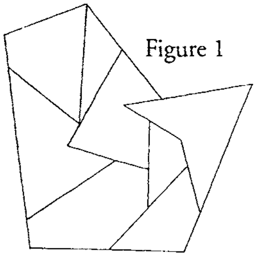


Figure 1

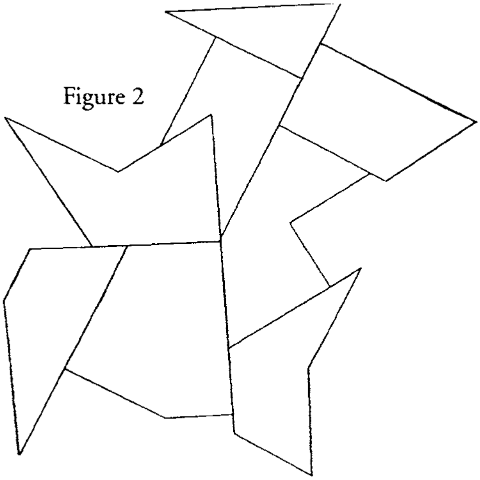


Figure 2

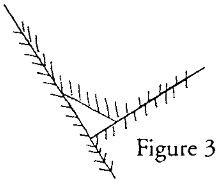
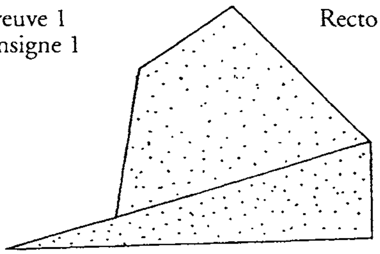


Figure 3

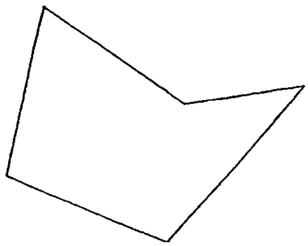
Annexe 4

Épreuve 1
Consigne 1

Recto

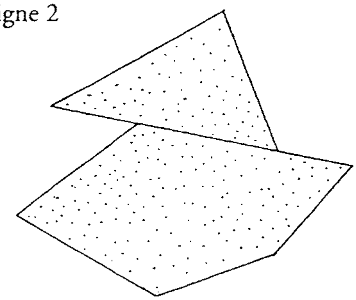


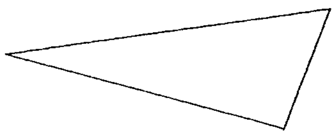
Verso



La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle? Explique comment tu as fait pour répondre. Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Épreuve 1
Consigne 2



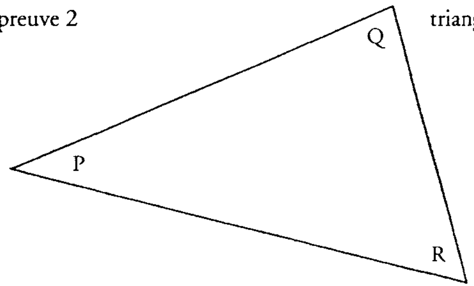


La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle? Explique comment tu as fait pour répondre. Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Annexe 5

Épreuve 2

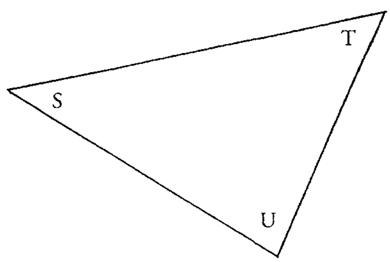
triangle 1



Dans le triangle 2, y a-t-il un angle égal à l'angle Q du triangle 1?
Si oui, lequel?

Dans le triangle 1, y a-t-il un angle égal à l'angle T du triangle 2?
Si oui, lequel?

triangle 2

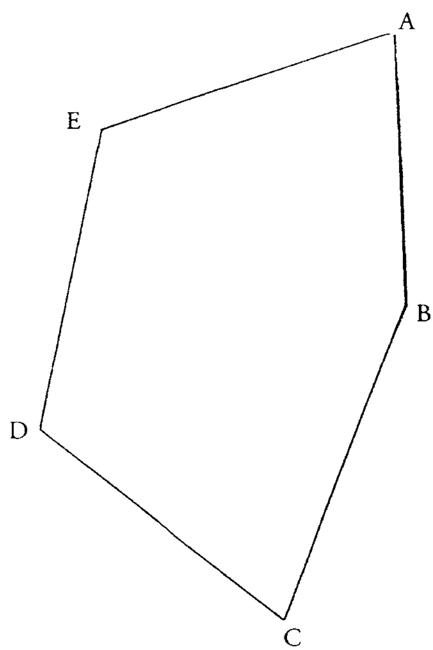


Annexe 6

Épreuve 3

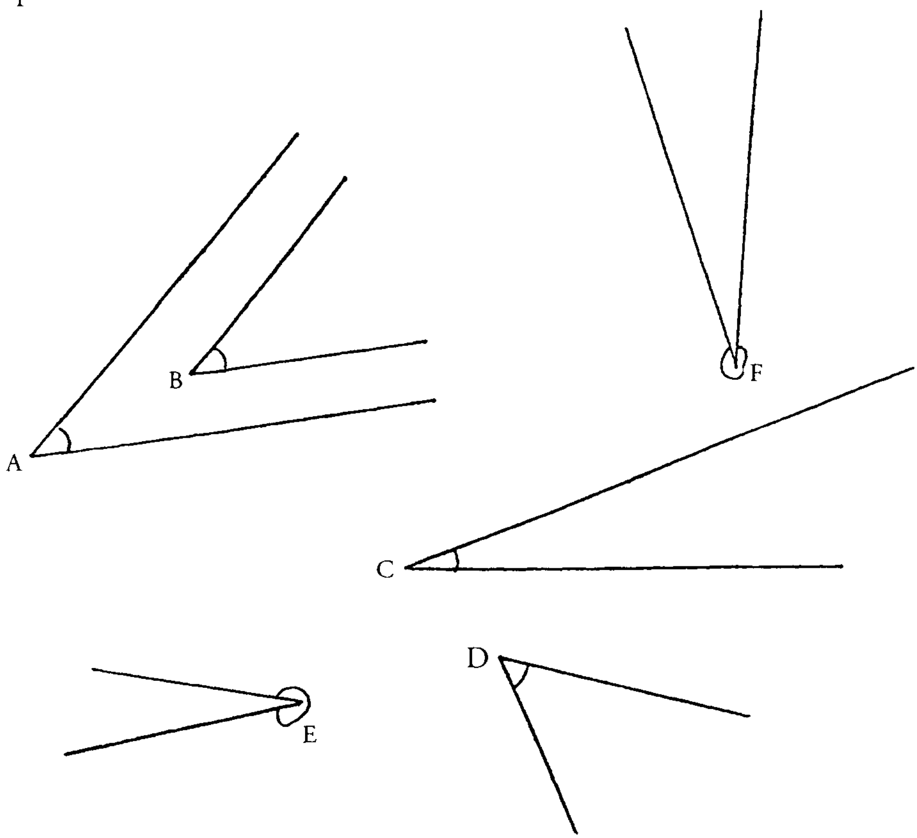
Y a-t-il un angle égal à $\hat{A}$?
Si oui, lequel?

Y a-t-il un angle égal à $\hat{D}$?
Si oui, lequel?



Annexe 7

Épreuve 4



Sur chaque paire d'angles, écris le nom du plus grand ou alors écris «ils sont égaux».

$\hat{A}, \hat{B}$:

$\hat{A}, \hat{C}$:

$\hat{C}, \hat{D}$:

$\hat{B}, \hat{D}$:

$\hat{B}, \hat{C}$:

$\hat{E}, \hat{F}$: