Revue des sciences de l'éducation

La création d'ignorance, condition de l'apprentissage

Alain Mercier

Volume 22, numéro 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI : https://id.erudit.org/iderudit/031884ar
DOI : https://doi.org/10.7202/031884ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Citer cet article

Mercier, A. (1996). La création d'ignorance, condition de l'apprentissage. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 345–363. https://doi.org/10.7202/031884ar

Résumé de l'article

Cet article a pour objectif de regarder l'enseignement du point de vue de l'élève. Un dispositif de recherche à deux temps a permis d'observer des élèves du secondaire (16-17 ans) en situation de classe d'abord, puis en situation hors classe en effectuant avec eux un retour sur les travaux réalisés en classe et corrigés par le professeur. L'étude fait ressortir, d'une part, que les savoirs enseignés par le maître ne constituent qu'une faible partie des apprentissages des élèves et que, d'autre part, ces apprentissages se produisent souvent hors du temps d'enseignement.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 345 à 363

La création d'ignorance, condition de l'apprentissage

Alain Mercier
Maître de conférence en didactique des mathématiques
École nationale de formation agronomique, Toulouse

Résumé – Cet article a pour objectif de regarder l'enseignement du point de vue de l'élève. Un dispositif de recherche à deux temps a permis d'observer des élèves du secondaire (16-17 ans) en situation de classe d'abord, puis en situation hors classe en effectuant avec eux un retour sur les travaux réalisés en classe et corrigés par le professeur. L'étude fait ressortir, d'une part, que les savoirs enseignés par le maître ne constituent qu'une faible partie des apprentissages des élèves et que, d'autre part, ces apprentissages se produisent souvent hors du temps d'enseignement.

Introduction

La théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1980) est fondée sur une idée-force: le savoir, pour être exposé par le professeur en un discours rationnel, doit être «mis en texte». La progression dans le «texte du savoir» marque alors le progrès de l'enseignement. Chevallard nomme «temps didactique» la temporalité scolaire qui en résulte. L'émergence historique de cette forme d'enseignement – contemporaine de la genèse moderne des sciences, dont le contenu s'expose sous la forme d'un texte rationnel – a été étudiée par Chevallard et Mercier (1987). L'émergence de la notion de temps didactique[1], centrale dans l'étude que nous engageons ici, émerge dans les travaux de sociologie de Verret (1974) sur les temps sociaux pour le cas de l'enseignement universitaire ou dans les travaux de Grossin (1974) sur les effets personnels des temporalités professionnelles, appuyés sur ceux de Gurvitch (1963) ou de Mauss (1966).

Certes, la théorisation des contraintes qui pèsent sur l'organisation du savoir en un texte et sur les «systèmes didactiques» où ce texte sera étudié rend compte de nombreux phénomènes observables dans l'enseignement des mathématiques, mais elle semble contradictoire avec les observations de la psychologie sur la manière dont se réalisent les apprentissages, et l'on est en droit de s'en étonner. Ainsi, Steinbring (1991) observe qu'on peut voir le professeur de mathématiques suivre constamment une progression linéaire sans reprise, qu'il nomme «formelle» au terme de son étude; cela correspond à la description chevallardienne de l'enseignement, mais l'apprentissage des sciences se fait par une série de reprises de la connaissance première, «après-coup», et Steinbring demande: «Comment, dans ces conditions, l'exposé formel peut-il produire des apprentissages?» La question avait déjà été posée par Skemp (1981):

> L'apprentissage des mathématiques demande le plus souvent des extrapolations et la formation de notions d'ordre plus élevé [...] on ne dit pas aux élèves ce qui se passe. Soit par exemple la multiplication. Ils apprennent d'abord le produit des naturels [...] puis on leur montre comment multiplier des entiers, des fractions, des matrices. Ce qu'on leur dit alors, c'est que «multiplication» signifie alors autre chose. On a étendu le sens de la notion elle-même, et non pas seulement la manière de l'effectuer. Faute de cette information cruciale, il est peu probable que les élèves réussissent à comprendre le sens relatif nouveau de la notion. Aussi, à la question «Quel est le plus grand nombre, 2n ou n + 1?»; ils répondent quelque chose comme «2n, parce que la multiplication fait toujours plus que l'addition» (Hart, 1981). [...] ce qui fait que nous avons un paradoxe. On ne peut pas indiquer aux élèves quelle est la nouveauté qu'ils ont rencontré, et ils ne peuvent la construire par eux-mêmes (traduction libre).

L'assertion de Skemp est forte et l'étude de Steinbring (1991) éclaire un point décisif de la question en montrant combien les savoirs des étudiants se développent sur un plan différent de celui de l'enseignant. Mais comment les étudiants font-ils?

Nous considérerons, dans cet article, que la théorie de la transposition didactique proposée par Chevallard (1980) et reprise par Chevallard (1992) décrit la progression temporelle créée par l'activité mathématique visible (la chronogenèse), telle que l'enseignant l'organise en jouant sur la différence entre son rapport aux objets mathématiques et celui qu'il propose à ses élèves (la topogenèse). C'est le phénomène dont Steinbring observe la réalité et l'efficacité, et dont il s'étonne. Car la capacité de la «théorie de la transposition didactique» à décrire la manière dont les élèves apprennent reste à vérifier. En effet, le «temps didactique» comme cette théorie le décrit n'est pas, à l'évidence, le temps de l'apprentissage. Après Bachelard (1938), de nombreux auteurs ont montré que l'apprentissage des savoirs scientifiques se fait sur la base de stratégies non séquentielles, par des retours en arrière et des reconstructions après-coup. Ainsi, sur la question des mathématiques, dès le début des années quatre-vingt, Keitel, Otte et Seeger (1980) et Skemp (1981), dans l'exemple cité plus haut, ou Brousseau (1982) attestent de ce même fait. De très nombreux auteurs ont depuis lors poursuivi ces observations. Seulement, comme le montre justement Steinbring, l'apparition d'objets nouveaux est la seule activité visible de la classe de mathématiques: l'auteur suggère même que presque rien d'autre n'y est jamais observé. À un tel point que les observateurs des classes de mathématiques s'y laissent souvent prendre: seul le travail sur la forme des comportements des élèves, parce qu'il est l'objet officiel de l'activité (il produit l'avancée du temps didactique) se laisse voir.

Cependant, les enseignants le savent par expérience, un élève à qui l'on vient d'enseigner ne sait encore rien par lui-même. Il ne sait rien hors de la situation où il a montré pour la première fois un comportement évaluable, comme l'effet d'un savoir. Il faut au moins donner à un élève l'occasion d'exercer son savoir naissant dans des conditions nouvelles, pour espérer observer plus tard, dans ses comportements, les signes de la maîtrise personnelle de ce savoir: il y a une durée du processus d'apprentissage soumis à l'enseignement. Seeger (1991, p. 145) introduit cette observation en se référant à l'autorité de Bateson: «Le problème vient de ce que le savoir nouveau, s'il ne consiste pas seulement en l'introduction d'une règle ou d'une procédure, implique un surplus théorique qui ne pourra être réalisé que dans le futur ou du point de vue d'un développement à venir "Si on ignore cette temporalité, on rencontre un paradoxe" (traduction libre). Seeger montre alors un phénomène qui nous semble essentiel pour la compréhension des faits d'enseignement: si les comportements humains ne peuvent être compris que dans leur devenir temporel, cela suppose que le chercheur se défasse, dans l'observation qu'il mène, d'une opposition (telle que Skemp a pu l'énoncer) de la forme de ces comportements (observable immédiatement) à ce qui serait la «compréhension personnelle» des savoirs mathématiques, la «vraie» connaissance, le fond (que l'on ne voit jamais aussitôt). Le fond n'est observable qu'indirectement et plus tard seulement. L'étude de ce problème nécessite l'observation à long terme, de la manière dont les élèves apprennent quand on leur enseigne à l'école: seule une telle observation peut montrer les effets du temps didactique sur les apprentissages.

Observer les élèves quand ils apprennent, pour comprendre l'enseignement

Pour observer l'apprentissage des élèves, il fallait donc regarder l'enseignement du point de vue de l'élève et, pour cela, sortir de la classe proprement dite. C'est, nous allons le montrer par un exemple, parce que les apprentissages des élèves n'ont pas lieu dans le temps de l'enseignement, mais après-coup; c'est encore, ce même exemple en témoignera, parce que, dans ces conditions, les élèves apprennent des savoirs qui ne sont pas les savoirs officiellement enseignés par le professeur: ces apprentissages lui sont «invisibles» soit parce que les savoirs sur lesquels ils portent sont, pour lui, obsolètes, soit parce qu'ils ne sont pas mathématiques mais protomathématiques ou même relatifs au contrat didactique. Certains des épisodes de la vie stéréotypée des mathématiques scolaires, en classe, ont un sens pour tel élève en particulier; comme la vie mathématique de cet élève continue après les heures de classe.

Pour observer les élèves (âgés de 16 à 17 ans) d'une Première S (classe scientifique, onzième année d'enseignement) en dehors de leur classe, nous avons utilisé deux dispositifs (Mercier, 1992). Nous avons créé, dans l'établissement scolaire, une «sous-institution» pour l'observation et pour l'aide à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques; elle était située dans un local où nous archivions des documents qui rendaient compte, de manière objective, de l'activité mathématique de la classe (les copies des devoirs réalisés par les élèves et corrigés par le professeur, les copies de cahiers d'élèves, des questionnaires et des enregistrements d'entretiens avec les élèves comme avec le professeur) et où nous tenions, un après-midi par semaine, une permanence ouverte aux élèves de la classe observée, pour qu'ils viennent y travailler sous notre direction s'ils éprouvaient des difficultés ou pour qu'ils viennent y poser les questions qui les intéressaient sur nos observations à propos de leur scolarité.

Nous avons utilisé parallèlement un dispositif minimal, plus souple. En France, le cours particulier est, pour près de la moitié des élèves qui désirent suivre des études scientifiques, un système d'aide devenu «indispensable»; il est donné le plus souvent au domicile de l'élève, après les heures de classe, par un étudiant devenu pour l'occasion précepteur ou répétiteur. C'est une institution bien identifiée et les élèves acceptent facilement d'en suivre quelques séances. Nous avons donc proposé, aux élèves qui le désiraient, un «cours particulier» de mathématiques que nous donnions gratuitement, dans l'établissement d'observation, et qui s'étalait sur trois à dix séances. Nous proposions aux élèves un travail après-coup, appuyé sur les questions qu'ils viendraient poser à propos de travaux déjà réalisés et corrigés par leur professeur. Ces séances étaient enregistrées au magnétophone. Nous avons réalisé ainsi de nombreuses observations d'élèves et celles que nous présentons ici proviennent de ce dispositif.

Le phénomène que nous voulions observer est apparu assez rapidement: les apprentissages observables sont le plus souvent provoqués par le fonctionnement ordinaire (temporel, linéaire) de l'enseignement; ils ne portent pas sur les objets de savoir «sensibles» (ceux que l'enseignant professe et sur lesquels porte l'action enseignante visible), mais sur les objets «désensibilisés» (professés il y a quelque temps) ou «insensibles» (non enseignés mais pertinents pour l'étude des savoirs sensibles). Les objets nouveaux, didactiquement sensibles, si visibles dans l'institution puisqu'ils font avancer le temps didactique, ne constituent en fait qu'une faible partie des apprentissages d'un élève: nous montrerons plus loin comment ce phénomène règle pratiquement la question paradoxale que soulèvent Skemp ou Steinbring, mais nous devons d'abord montrer le fait, et démontrer comment sa compréhension théorique en fait un phénomène didactique essentiel pour la théorie de la transposition et celle du temps didactique.

Voici donc un premier exemple, simple, du phénomène décrit.

Patricia est une élève de Seconde (15-16 ans). L'épisode se passe juste avant l'interrogation écrite sur les valeurs absolues. Les élèves font des exercices semblables à ceux de l'interrogation.

La première équation proposée est: $|2x - 1| = 4$

Patricia a commencé un tableau.

x	
$2x$	

puis, elle a repris:

$|2x - 1| = 4$

$|2x| = 4 + 1$

$|2x| = 5$ ...

Patricia devait faire les opérations suivantes.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
2x - 1	-		+
$\|2x - 1\| = 4$	$1 - 2x = 4$ donc $x = \frac{-3}{2}$		$2x - 1 = 4$ donc $x = \frac{5}{2}$

Elle devait ainsi apprendre que $|2x - 1| = 4$ n'est pas une équation du premier degré puisqu'on ne la traite pas comme telle. Elle devait alors chercher, éventuellement, ce qu'il en est du degré d'une équation comportant une valeur absolue pour voir d'abord que l'équation proposée équivaut à deux équations du premier degré, c'est-à-dire qu'elle équivaut à une équation du second degré. Et, en effet, $|2x - 1| = 4$ équivaut à $(2x - 1)^2 = 16$. Mais cette élève ne s'est pas encore rendu compte des ignorances qui étaient les siennes. Patricia ne les rencontrera qu'au détour d'un problème; en effet, l'enseignant n'a pas organisé cette rencontre; il a fait comme si elle allait de soi. Comme nous sommes à la veille du contrôle (devoir écrit limité en temps), l'urgence met Patricia dans une situation défavorable; elle ne peut changer ce jour-là son rapport aux équations, et elle échouera au contrôle du lendemain. La rencontre d'un problème ne nécessite pas automatiquement la recherche et l'invention d'une solution et dans une institution didactique, ce n'est le cas que pour les objets de savoir sensibles.

La présence de la «valeur absolue» impose la transformation du rapport de tout élève à l'objet ancien l'«équation où x est au premier degré». C'est donc en essayant d'utiliser son savoir ancien sur les équations que Patricia rencontre son ignorance et celle-ci est créée par l'enseignement des équations où x est au premier degré et qui comportent une valeur absolue. Le phénomène observé peut donc être défini comme «la transformation de l'ignorance rencontrée, en injonction didactique relative à un savoir particulier». Autrement dit, la transformation d'un manque de savoir en besoin d'un savoir particulier et en intention de l'apprendre. Il y a ici une difficulté supplémentaire: l'élève doit identifier des savoirs nouveaux à propos d'un objet qu'elle pense déjà connaître.

Quelques paradoxes de l'intention d'enseigner

Les mathématiques offrent un cas particulièrement ancien d'expression du lien paradoxal entre l'enseignement et l'apprentissage, mais il semble que chaque théorie de l'enseignement et chaque théorie de l'apprentissage aient produit des formes spécifiques du paradoxe. Il s'agit toujours de rendre compte de l'inconcevable: l'apparition intentionnelle d'une pensée nouvelle. «Peut-on obtenir un comportement caractéristique d'une connaissance sans le diriger par des explications?» demandait Skemp. Peut-on chercher à connaître ce dont on ne soupçonne pas l'existence, demandait Ménon. Les deux formes du paradoxe montrent l'une, le point de vue d'un enseignant, l'autre, le point de vue d'un étudiant.

Le dialogue de Socrate avec Ménon traite de ce qui peut être enseigné (la science) et de ce qui ne peut l'être, parce qu'on ne peut l'atteindre qu'entier, d'un coup (la vertu est-elle enseignable?). Platon y présente l'étude d'une forme première de ces paradoxes, caractérisée par Socrate de «sujet de dispute sophistique». À cette occasion, une théorie de la connaissance, l'anamnèse ou réminiscence, est présentée par Socrate qui utilise, pour la démontrer par une expérience, les deux techniques qui se déduisent de sa théorie, l'aporie et la maïeutique[2]. Socrate pose ainsi la question que nous voulons étudier.

79c Socrate: [...] On ne peut reconnaître une partie de la vertu sans connaître la vertu elle-même [...]

Ménon: Mais comment vas-tu t'y prendre, Socrate, pour chercher une chose dont tu ne sais absolument pas ce qu'elle est? Et à supposer que tu tombes juste, à quoi le reconnaîtras-tu puisque tu ne le connais pas? [...]

80e Socrate: Je vois ce que tu veux dire, Ménon. Quel beau sujet de dispute sophistique tu nous apportes là! C'est la théorie selon laquelle on ne peut chercher ni ce qu'on connaît ni ce qu'on ne connaît pas: ce qu'on connaît, parce que, le connaissant, on n'a pas besoin de le chercher; ce qu'on ne connaît pas, parce qu'on ne sait même pas ce qu'on doit chercher [...]

81e Ménon: Soit, Socrate, mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas et que ce que nous appelons le savoir est une réminiscence? Peux-tu me prouver qu'il en est ainsi? [...]

Socrate: Appelle un de ces nombreux serviteurs qui t'accompagnent... (à l'esclave) Dis-moi, mon ami, sais-tu que cet espace est carré?

L'esclave: Oui. [...]

Socrate: Ne pourrait-on avoir un autre espace double de celui-ci, mais semblable, et ayant toutes ses lignes égales?

L'esclave: Oui.

Socrate: Combien aurait-il de pieds?

L'esclave: Huit. [...]

Il s'agit de définir le côté d'un carré dont l'aire serait le double d'un carré donné, de côté deux et d'aire quatre, et de montrer que ce côté n'est pas double, mais doit être égal à la diagonale du carré initial. L'esclave pense d'abord à doubler le côté, mais Socrate montre qu'on obtient un carré de seize. L'esclave propose alors un côté de trois, ce qui donne un carré de neuf.

Socrate: Ce n'est donc pas encore la ligne de trois pieds qui nous donne la surface de huit.

L'esclave: Évidemment non.

84a Socrate: Laquelle est-ce? Tâche de me le dire exactement, et si tu aimes mieux ne pas faire de calculs, montre-la-nous.

L'esclave: Mais par Zeus, Socrate, je n'en sais rien.

Socrate: Vois-tu, Ménon, encore une fois, quelle distance il a déjà parcourue dans la voie de la réminiscence? [...]

Maintenant, il a conscience de son embarras, et s'il ne sait pas, du moins il ne croit pas savoir.

Nous avons ici une aporie: l'esclave est au point où se révèle, pour lui, une contradiction interne à sa connaissance première. Cette contradiction ouvre la voie à la maïeutique, un style de questionnement particulier à Socrate et qui va aider l'esclave à se remémorer la vérité.

84d Socrate: Vois maintenant tout ce que cet embarras va lui faire découvrir en cherchant avec moi, sans que je lui enseigne rien, sans que je fasse autre chose que l'interroger [...]

86b Ménon: Il me semble que tu as raison, Socrate, je ne sais trop comment.

Socrate: Il me le semble aussi, Ménon. [...] Mais qu'à regarder comme un devoir de chercher ce que nous ignorons nous devenions meilleurs, plus énergiques, moins paresseux que si nous considérions comme impossible et étrangère à notre devoir la recherche de la vérité inconnue, cela, j'oserais le soutenir contre tous. [...] Ce qui s'enseigne, c'est uniquement la science. [...] Si la vertu donc est une science, elle peut être enseignée.

La solution proposée repose sur l'idée que la connaissance n'est pas une construction personnelle parce qu'elle tient de la vérité, qui est par nature éternelle et indépendante de l'opinion de chacun: l'esclave n'a donc pas à la construire, il est simplement mis en situation de la «reconnaître». Il peut le faire, parce qu'en tant qu'être humain, il participe au monde des idées vraies que la réalité – et la connaissance première que nous en avons – nous font oublier: il nous faut donc retrouver le souvenir de la vérité, c'est la théorie de la réminiscence dont le «mythe de la caverne» est une des métaphores explicatives. L'aporie révèle à l'esclave une contradiction interne à sa connaissance première, c'est la condition de la réminiscence; la maïeutique réalise la réminiscence, soit la naissance conjointe du sujet qui connaît et de l'objet de connaissance: il faut donc accepter l'embarras de la pensée comme une question persistante pour arriver à reconnaître la vérité jusqu'alors insoupçonnée que la certitude de savoir masquait. C'est ce que permet le questionnement de Socrate qui «accouche» l'esclave de la vérité qu'il portait en lui.

Les paradoxes des théories de l'apprentissage intentionnel sont toujours vivants, même si nous n'étudions pas l'enseignement de la vertu ou l'accès à la vérité. Ainsi, Fodor (1979), prenant parti dans le débat célèbre de Chomsky avec Piaget, a donné une des formes actuellement vivantes de la question: ce chercheur s'appuie sur la théorie des automates programmables, dont il généralise les lois à tout apprentissage par induction, pour réfuter le constructivisme comme une théorie paradoxale: un «système-apprenant» ne saurait produire rien de plus complexe que le programme qui le commande, le constructivisme suppose donc une forme de réminiscence, affirme Fodor. Les constructivistes ont réagi: contrairement à Socrate, ils ne proposent pas l'idée que la connaissance serait toujours déjà là, parce qu'elle appartiendrait à un au-delà de la personne. Ils montrent que les schèmes sont des objets complexes intérieurs et qu'ils suffisent à simplifier la pensée nécessaire à la tâche, si l'on accepte l'idée que la pensée manipule des schèmes. Ainsi, Steffe (1990) définit «l'abstraction réflexive» comme un processus par lequel des connaissances qui se manifestent par un schème d'action peuvent être des objets d'une nouvelle connaissance; il explique l'apprentissage du surcomptage comme un processus d'abstraction réflexive portant sur le schème du comptage. En revanche, Bereiter (1985) avait repris l'argument de Fodor et montré (à propos de l'apprentissage du surcomptage) que, pour satisfaire à la condition de Fodor, le cognitif doit nécessairement être associé à de nombreux facteurs affectifs ou sociaux parce que seule la conjonction de ces facteurs peut donner un «système apprenant» suffisamment complexe: son travail repose sur l'hypothèse que les «structures cognitives», les «connaissances personnelles» et les «savoirs mathématiques collectifs – formels» sont des items équivalents du «développement cognitif». Il reprend donc l'idée que la connaissance appartient à un au-delà de la personne (ce qui lui permet d'être extérieure et toujours, déjà là: l'irruption du nouveau est l'exception absolue), mais pour lui, cet au-delà serait porté par une dimension collective de la connaissance.

De nombreux chercheurs proposent des solutions proches. Brousseau (Brousseau, Rouchier, Balacheff, Laborde et Chevallard, 1980) montre que la connaissance est parfois attribuée indûment à un comportement et il affirme en particulier que c'est le cas dans le dialogue de Socrate avec l'esclave de Ménon. Il cherche alors à répondre à la question: «Sous quelles conditions pouvons-nous attribuer la même signification, le même sens, à un comportement dont nous obtenons la reproduction? (traduction libre). Il considère que, comme la connaissance n'est jamais observée directement, les comportements humains qui peuvent caractériser une connaissance doivent être rapportés aux contraintes de la situation où ils peuvent être observés: seules ces contraintes peuvent garantir le sens du comportement. Cobb (1989) insiste sur la nécessité d'étudier la connaissance manifestée par un élève en situation scolaire comme un phénomène anthropologique, c'est-à-dire comme un fait qui se rapporte à la collectivité où il est observable. Il montre que cette dimension d'expérience collective contient, pour les membres de la collectivité qui produit le savoir, la réponse à la question de la vérité: la vérité est institutionnelle. Cela permet à chacun de la ressentir à la manière de Socrate, comme un objet qui était déjà là (au-delà des personnes) et qu'il fallait redécouvrir personnellement. Enfin, Chevallard (1992) introduit la notion de «rapport institutionnel au savoir», qui permet de comprendre comment un élève s'appuie sur l'institution qui contraint son action pour résoudre les problèmes qu'il se pose. Pour Chevallard, «le milieu» des situations didactiques que Brousseau analyse pour rendre compte des comportements observables ne comprend pas seulement des objets matériels, mais aussi les connaissances qui vont de soi pour l'élève, les règles sociales stables et les moyens que procure l'organisation collective de l'étude. La logique de ces développements amène à affirmer que la connaissance est identifiable par l'analyse *a priori* du milieu de la situation où elle peut être observée; elle est partagée entre les acteurs et les dispositifs d'aide à l'action qu'ils peuvent instrumenter: les études en didactique des mathématiques réalisées par les chercheurs qui se réclament de cette école (Artigue, 1994) ont montré l'efficacité de cette position et nous la partageons.

Cependant, les élèves apprennent aussi personnellement. Nous considérons alors qu'ils deviennent progressivement capables de prendre à leur compte une part plus grande de la connaissance collective de la classe (à laquelle le professeur participe). Cette position permet de comprendre comment, dans les conditions apparemment défavorables que crée pour eux l'enseignement traditionnel (lorsque le professeur assure la progression temporelle en exposant le texte du savoir et qu'il propose aux élèves les exercices d'application ordinaires, avant de les corriger), les élèves apprennent avec un succès équivalent à celui qu'ils ont à la fin des expériences où des enseignements conformes aux théories de l'apprentissage les plus sophistiquées tentent de s'éprouver. Voici donc un des apprentissages personnels que nous avons pu observer, comme ils se sont passés pour une élève, Delphine, dans une institution didactique ordinaire, dans une «classe de Terminale Scientifique, option Biologie».

Comment l'enseignant peut assurer l'apprentissage de savoirs qu'il n'enseigne pas

Un usage surprenant des exercices

Si, dans l'observation précédente, la reprise du rapport aux équations du premier degré était laissée tout entière à l'initiative des élèves, dans l'exemple qui suit, la reprise du rapport à la factorisation est gérée par l'enseignant au moyen des exercices donnés à voir ou à faire aux élèves. Mais cette gestion est entièrement implicite, parce que cette manière de factoriser n'est pas l'objet officiel de l'enseignement (une explication à son sujet arrêterait donc la progression temporelle) et ne peut être évaluée: nous dirons que la nouvelle technique de factorisation n'est pas didactiquement «sensible».

Une théorie des diverses techniques de factorisation suppose une théorie des polynômes que l'on factorise, on ne rencontre ni l'une ni l'autre avant l'université. Jusqu'à ce jour, «factoriser un polynôme de la variable x», c'était l'écrire comme un produit de polynômes du premier degré en x (en général, cette opération était liée à la résolution de l'équation $P(x) = 0$); factoriser, ce sera dorénavant mettre en facteurs le terme de plus haut degré en x: un tel geste n'était pas même envisageable dans les classes précédentes, parce que l'autre facteur du produit n'est pas un polynôme! Pour que l'élève à qui l'on demandait de «factoriser $7x^2 - 21$» réalise exactement le geste attendu: «$7x^2 - 21 = 7(x^2 - 3) = 7(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$», il fallait par exemple que «$7(x^2 - 3)$» soit une réponse interdite parce que la factorisation est alors incomplète dans la mesure où $x^2 - 3$ est factorisable, mais il fallait que les réponses « $7x^2\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$» ou « $21\left(\frac{x^2}{3} - 1\right)$» soient elles aussi interdites.

L'élève n'avait qu'une seule «bonne réponse» à sa disposition, tout comme il n'a qu'une réponse à la demande «factorise 21» (3×7 et non $4 \times 5{,}25$ ou $9 \times 7/3$). C'est en quelque sorte une question de «savoir-vivre» de l'élève (Tonnelle, 1980). Le professeur peut donc faire évoluer les règles du «savoir-vivre» sans le dire; ce ne sont pas des techniques enseignées, produites à partir de l'étude d'un problème mathématique et de l'exposé d'une théorie pertinente à l'attaque du problème. Le savoir-vivre s'apprend en situation, par imitation.

Nous observons le contenu d'un cahier d'élève, celui de Delphine. Ce cahier rapporte une suite d'objets de savoir, nommés explicitement. Delphine a pris soigneusement note des titres et des sous-titres de la leçon de mathématiques et nous n'avons pas besoin de plus d'informations pour observer le phénomène qui nous intéresse. La factorisation n'est jamais nommée dans le cahier de Delphine; ce n'est pas un objet sensible; elle est introduite à l'occasion de l'enseignement des calculs de limites infinies, dans le cas des fonctions non rationnelles. L'injonction, faite aux élèves, d'avoir à transformer leur rapport à la factorisation, se fait dans la classe de Delphine par l'introduction d'objets mathématiques qui n'ont pas d'autre usage: «des fonctions qui ne sont pas des fonctions polynômes, mais qui sont formées à partir de fonctions polynômes».

Exemple

Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

Donc, $$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

Comme $$\lim_{x \to \infty}\left(x^3\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ (même méthode)

Le professeur traite lui-même ces premiers exemples. Ils font donc partie du cours sur les calculs de limites. Le cahier continue ainsi.

5) Limite d'un polynôme à l'infini

Propriété: La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(x) = 5x^3\left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right)$$

comme $$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(5x^3\right) = +\infty$$

6) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple

1) $$f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{3x^2 - 1} \quad (\ldots)$$

2) $$\lim \frac{5x^2 - 1}{2x^2 - 3} \quad (\ldots)$$

Propriété: a, b, c, étant infinis ou réels, si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} (g_a f)(x) = c$

Exemple limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ en $+\infty$ (...)

Les exercices qui suivent sont donnés à faire aux élèves de la classe.

Exercices

Limite à l'infini de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x - 1}}{x - 2}$$

a)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4\left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$f(x) = x\,\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

Exercices suivants (ils sont systématiquement traités par le procédé ci-dessus; il y en a plus de dix).

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1 - 3x^2 + 1}$

Les fonctions composées de fonctions polynômes sont seules présentes dans les exercices parce que ce sont les seules fonctions connues des élèves qui invalident les théorèmes que le professeur vient de dicter. Si l'enjeu de leur présence était instrumental (étudier un type particulier de fonctions) et non didactique (montrer aux élèves un geste de factorisation), l'enseignant définirait «le degré rationnel de la composée d'une fonction polynôme et d'une fonction irrationnelle» et étendrait les théorèmes à leur cas. Cette interprétation trouve sa confirmation dans le fait que de telles fonctions ne sont jamais présentes dans les énoncés d'examen (elles sont d'ailleurs «hors-programme»).

Comment nous savons ce que Delphine a appris

Mais ni Delphine ni nous-même n'avions, sur le moment, repéré ces apprentissages. Ils nous ont été désignés par un épisode remarquable dont nous devons maintenant rendre compte. Deux mois après l'enseignement sur les limites infinies, Delphine travaille sur le thème de «l'étude des fonctions logarithmes». À cette séance du cours particulier, elle est arrivée avec «beaucoup de questions à poser». En effet, nous dit-elle, «ça n'a pas bien marché dans le devoir en classe», alors même qu'elle peut annoncer «une bonne note: 13,5/20» pour le devoir précédent. Sa première question porte sur des calculs de limites, pour l'étude sur IR_+^* de deux fonctions comportant un logarithme. $g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$; puis, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x}$. Delphine dit qu'elle «n'a pas réussi à lever l'indétermination». Nous orientons le travail sur la détermination de la limite de f en «plus l'infini» et nous nous étonnons de ce que Delphine n'ait pas fait appel aux théorèmes dont elle disposait. Delphine avance qu'elle dispose bien d'un théorème, mais qu'il ne s'applique pas ici parce que le dénominateur n'est pas x lui-même. Nous lui faisons observer qu'il aurait suffi d'écrire:

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x} = \frac{\ln x}{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \dashrightarrow 0 * 1 = 0$$

Pour pouvoir «appliquer le théorème du cours» sur les limites à l'infini de $\frac{\ln x}{x}$, il faut savoir sans hésiter «mettre x en facteur dans l'expression x + 1» parce que ce geste «fait apparaître un x, et une expression de limite finie qui se trouve donc être inerte pour la question». Delphine ne trouve rien à répondre à cela parce que c'est ce qu'elle a fait! L'examen de sa copie illustre qu'elle a factorisé correctement et qu'elle a commis une erreur sur le théorème. La difficulté était donc banale, elle a produit une erreur vite corrigée. Cela montre la pertinence de la pratique de factorisation montrée il y a deux mois: Delphine s'en ressouvient lorsque le besoin s'en fait sentir, surtout dans le cas des fonctions comprenant un logarithme où elle sera systématiquement employée.

Cette observation donne l'exemple d'une gestion didactique qui – pour Delphine, tout au moins – a assuré l'apprentissage attendu, à l'insu de l'élève. Car, sans le cours particulier, Delphine n'aurait toujours pas été avertie de son apprentissage; elle aurait attribué son échec à la difficulté des fonctions logarithmes. Même elle aurait pu, comme nous dans notre premier mouvement, attribuer cet échec à une mauvaise maîtrise de la factorisation servant à montrer la partie de la fonction qui est inerte pour le calcul de la limite. Le professeur, en classe, peut certes prévoir une difficulté, mais il ne travaille pas sur le passé: au moment de l'incident rapporté, il traite des fonctions logarithmes, qui forment le savoir sensible. Il corrige l'exercice sans faire de commentaires.

Le phénomène montré est-il général?

Nous avons observé plus systématiquement les élèves d'une classe de première scientifique (Mercier, 1992) et nous avons montré que les objets mathématiques officiellement enseignés ne sont pas, loin s'en faut, les seuls objets pertinents de la classe de mathématiques. C'est ainsi que, par exemple, l'enseignant de la classe de Delphine a pu prendre en charge l'enseignement de la factorisation en s'appuyant sur l'intention didactique des élèves, qui apprendront par eux-mêmes les savoirs nécessaires à la résolution des exercices qu'il propose. Les élèves pour leur part doivent comprendre comme des injonctions didactiques les ignorances ou les embarras qu'ils rencontrent à propos de bien d'autres objets que les savoirs proprement dits.

Le paradoxe a une solution pratique dont la théorie doit rendre compte

Comment les élèves savent ce qu'ils ont à apprendre

L'intention caractérise la relation didactique: intention d'enseigner et intention d'apprendre. L'étude des moyens dont le professeur dispose pour réaliser l'intention d'enseigner est depuis longtemps au programme des recherches didactiques, mais l'étude de l'intention d'apprendre en est à ses débuts. Il s'agit d'observer l'articulation de la temporalité personnelle de l'élève, le «temps biographique de l'apprentissage», à la temporalité institutionnelle de l'école, le «temps systémique de l'enseignement». Cette articulation peut maintenant être construite: une intention didactique produit des injonctions didactiques en produisant de l'ignorance: le fonctionnement temporel de l'école produit «de l'ignorance institutionnelle» (Chevallard 1992) que certains élèves rencontrent, ce qui crée pour eux la nécessité d'apprendre. Les conditions qui permettent que des élèves passent de la nécessité d'apprendre à l'acquisition d'un savoir nouveau ont été analysées par Brousseau (1982, 1986 et 1992) comme des «variables» de la situation adidactique[3].

Il est intéressant de remarquer que nous retrouvons, avec la notion d'ignorance institutionnelle, l'aporie même, tandis que, avec les conditions de la situation adidactique (qui réalise l'émergence collective de la connaissance) nous ne retrouvons que la fonction de la maïeutique (qui réalise la réminiscence, le rappel de la connaissance à la mémoire). Ce sont les deux moments d'une intention d'enseigner qui se réalise. Mais, nous observerons aujourd'hui, dans l'école, un phénomène qui n'est pas conscient et qui reste le plus souvent invisible aux yeux des acteurs eux-mêmes. C'est pourquoi nous ne pouvons pas observer des élèves dans le cadre d'une classe de mathématiques sans observer très largement leurs rapports aux objets de l'espace didactique, qu'ils soient relatifs à la rencontre du savoir et au savoir lui-même, relatifs à la gestion des conditions de la rencontre des élèves avec le savoir ou relatifs à ces conditions elles-mêmes, comme contraintes.

La biographie didactique des élèves

L'élève, parce qu'on lui enseigne, est naturellement soumis au temps du système didactique, qui est pour lui un temps collectif et officiel. Pour l'élève, le temps est mesuré par l'évolution des rapports institutionnels aux objets de savoir (anciens ou nouveaux); il est donc constitué par une succession d'épisodes du type de ceux que nous avons montrés ici. Comment pouvons-nous accéder à ces épisodes? Un accès économique (mais aléatoire) nous est donné par le sens qu'ils prennent pour des élèves particuliers. Nous observons alors des fragments de la biographie didactique d'élèves qui nous donnent accès à ces épisodes. Le point de vue biographique nous permet de préciser notre connaissance des systèmes didactiques: du point de vue de l'élève, on peut observer l'action enseignante.

Les responsabilités respectives des élèves et des professeurs dans la réussite de l'enseignement

C'est un phénomène banal qui fait depuis plus de deux siècles le succès de l'école: l'articulation du cours (que l'élève «apprend») aux exercices (que l'élève «fait») a été durant cette période le mode d'enseignement dominant, en France tout au moins. Cette articulation, systématiquement organisée, ouvre aux élèves un espace plus vaste que l'espace du discours professoral parce que la présence des objets que l'élève doit manipuler pour faire les exercices rend nécessaire la présence de savoirs – insensibles, mais pertinents – pour la manipulation des objets enseignés. Ces objets pertinents, l'élève est presque toujours censé les connaître d'une manière idoine à leur usage alors que, le plus souvent, il n'en est rien: l'élève ignore en fait le geste mathématique que l'on attend de lui, mais ce geste est tel que, s'il cherche à se l'enseigner, il peut l'apprendre.

Les enseignants ne sont pas attentifs à certains des apprentissages réels des élèves parce qu'ils sont comptables du rapport institutionnel aux objets sensibles qu'ils gèrent et qu'ils doivent prendre «pour argent comptant» la part de l'apprentissage qu'ils ont à évaluer. Mais il arrive souvent qu'ils organisent la rencontre de savoirs insensibles, car ils peuvent, dans ce but, poser des exercices pour intervenir sur l'espace des objets que les élèves manipulent. En revanche, il semble que la reprise, par le professeur, des savoirs que les exercices permettent d'apprendre et que l'institutionnalisation de ces savoirs ne soit pas fermement assurée, dans le cadre de l'organisation traditionnelle de l'enseignement. L'apprentissage réfléchi des savoirs insensibles suppose au contraire une gestion efficace du passé, un travail systématique de la mémoire collective, ainsi que l'ont montré Brousseau et Centeno (1991). Le travail de la mémoire résout, dans notre cadre théorique, la question de la gestion du rapport des élèves à leurs propres apprentissages. C'est la question que posent les tenants du travail métacognitif. Mais notre réponse montre un problème que ces derniers n'ont pas traité parce qu'ils sont nécessairement limités à des savoirs déclarés: c'est le problème des savoirs qui ne sont pas explicitement enseignés et qui ne sont pas consciemment appris. Un enseignement qui prend en charge l'apprentissage n'est pas, pour nous, un enseignement qui tente d'assurer à tout instant l'identité des savoirs appris et des savoirs enseignés, mais un enseignement qui prend en charge explicitement la reprise du passé pour montrer ce qui a été appris sans avoir été nommément enseigné.

Conclusion

Nous pouvons reprendre maintenant les problèmes que nous soulevions dans l'introduction. Le temps didactique détermine la progression légale du système didactique, le maître en est le comptable devant la classe et les élèves sont attentifs à ce que l'action enseignante soit efficace. Les objets de savoir qui font aller le temps didactique sont les objets didactiquement sensibles: un élève doit en effet montrer, en temps utile, publiquement, un rapport à ces objets que l'enseignant jugera conforme ou non conforme. La logique de l'apprentissage est tout autre. Le temps didactique n'est donc pas le temps de l'action de celui à qui l'on enseigne, mais il est pourtant nécessaire à un fonctionnement didactique qui résout finalement les paradoxes que rencontre toute volonté didactique: «Comment l'élève peut-il chercher à connaître ce qu'il ne connaît pas, ce dont il n'a pas idée? Comment l'enseignant peut-il obtenir les comportements de l'élève qui manifestent sa maîtrise du savoir, sans dire ce qu'il attend que l'élève fasse?» L'école moderne propose une solution parce que deux «lieux» sont distingués dans l'espace didactique: les lieux «enseignant» et «enseigné». Pour chacun, relativement à chaque objet du savoir enseigné, on peut observer un ensemble déterminé de comportements caractéristiques. Ainsi, en principe, l'enseignant expose que l'enseigné apprend, il démontre les théorèmes que l'enseigné applique; l'enseignant propose les problèmes que l'enseigné cherche et résout, puis il en corrige les solutions. Ainsi, en principe, l'enseignant ne pose que des questions dont il connaît la réponse, et l'enseigné ne se voit poser que des questions dont il aurait (par principe) pu trouver la réponse à l'aide de ce qui lui a été enseigné. Mais ni le maître ni l'élève ne reconnaissent ce partage, car, à tout moment, ils travaillent officiellement sur le même objet de savoir. Cela leur permet d'agir comme s'ils entretenaient le même rapport à ces objets, à un décalage temporel près.

Professeur et élève peuvent se penser égaux vis-à-vis du temps légal et se partager réellement les comportements relatifs aux objets de savoir enseignés. Ils se partagent en fait la connaissance de ces objets, qui nous apparaît maintenant clairement comme une propriété collective dont chacun, maître et élèves, porte sa part. C'est, par exemple, ce que fait le professeur qui transforme un problème mathématique en l'énoncé d'un problème scolaire: les questions qu'il pose montrent la part qu'il prend dans la résolution du problème mathématique et souvent cette part est telle que l'élève, qui a résolu le problème en répondant aux questions posées, ne peut pas dire quel problème mathématique il a résolu. La solution moderne des paradoxes de l'intention didactique réside ainsi dans les moyens de négociation du partage des rapports aux objets de savoir qu'offre la temporalité particulière des systèmes didactiques. De l'enseignant à l'élève, il y a, par conséquent, bien plus qu'un écart dans le temps, qui pourrait être rattrapé. Certains objets manipulés par le maître pourront rester très longtemps hors d'atteinte de l'apprentissage, pour des élèves: le temps efficace des élèves n'est pas le temps didactique.

Comment peut-on avoir besoin de chercher ce que l'on croit déjà connaître? Par le fait qu'une institution parvient à nous persuader qu'on ne le connaît que très mal en nous faisant rencontrer notre ignorance et en nous offrant de la combler. Pour cela, elle nous distribue la connaissance qu'elle nous aide à produire collectivement, à partir des questions dont elle conserve la mémoire. C'est pour cela sans doute qu'on ne peut enseigner que ce qu'une institution peut porter et qui peut se partager entre l'enseignant et les élèves soit, par exemple, une science qui s'expose en un discours, comme les mathématiques[4].

NOTES

1. Cet article porte sur l'observation des apprentissages en classe de mathématiques par l'analyse des situations didactiques. Nous devons remercier ici Yves Chevallard, à qui nous empruntons une grande partie du cadre théorique de notre réflexion, Guy Brousseau, sans qui le travail présenté n'aurait sans doute pas abouti, les lecteurs anonymes et attentifs d'une version précédente non publiée et Gérard Sensevy, pour ses remarques qui sont à l'origine de certaines des idées que l'article présente aujourd'hui.

2. Socrate avait formulé et résolu les paradoxes que nous énonçons ici par les notions d'anamnèse pour la théorie de la connaissance, par la maïeutique et l'aporie pour les techniques d'enseignement (Platon, IV[e] a.c., *Le Ménon*, 82a-86a et *Le Phédon*, 73a–75b). L'aporie, l'impasse où mène l'opinion qui en vient à se contredire elle-même, est, pour la pensée, la transition indispensable entre l'opinion fausse et la connaissance. La maïeutique est alors le type de questionnement qui permet de retrouver le chemin de la connaissance et, par une conversion de la pensée, de construire une vérité qui sera sans commune mesure avec l'opinion première, en aidant chacun à réunir pour lui-même les exigences de ses opinions vraies, qu'il porte en lui de tout temps et dont il peut, à cette condition seulement, retrouver le souvenir: c'est la réminiscence.

3. La théorie des situations repose sur la modélisation, en termes de théorie des jeux, de certaines composantes d'une situation didactique. On appelle «situation adidactique» la partie de la situation didactique modélisable par un jeu à un joueur, l'élève. L'analyse des stratégies disponibles à l'action de l'élève met en évidence des «variables», qui commandent les comportements observés en rendant certaines stratégies plus économiques que d'autres. Les stratégies observées témoignent du savoir mis en œuvre par les élèves, dans leur action: «les variables de la situation adidactique commandent donc les savoirs appris par un élève, dans une situation didactique donnée».

4. Mathématiques signifie originellement «ce qui s'enseigne», avant de prendre le sens plus précis de savoir, puis de science des nombres et de l'espace.

Abstract – The objective of this article is to examine teaching from the students' perspective. A two-stage research design provided observational data of secondary level students (16-17 year olds) both in classroom situations and outside the classroom, through a discussion amongst themselves regarding teacher-corrected assignments. The study showed that the content material taught by the teachers is only a small component of students' learning and, significantly, that much learning often results from situations outside formal teaching.

Resumen – En este artículo se ve la enseñanza desde el punto de vista del alumno. Un dispositivo de investigación en dos etapas ha permitido observar alumnos de secundaria (16-17 años), primero en una situación inicial de clase y después en una situación fuera de clase, en donde se examinó con ellos los trabajos realizados en clase y corregidos por el maestro. El estudio hace resaltar por un lado que los saberes enseñados por el maestro no constituyen más que una pequeña parte del aprendizaje de los alumnos y que, por otra parte, este aprendizaje se produce frecuentemente fuera del periodo de clase.

Zusammenfassung – Dieser Artikel betrachtet den Unterricht aus der Sicht des Schülers. Im Rahmen eines zweiteiligen Forschungsprojektes wurden sechzehn- und siebzehnjährige Schüler der Mittelschule zunächst während der Unterrichtsstunde beobachtet. Dann wurde ihnen die Gelegenheit gegeben, außerhalb der Klasse noch einmal auf die während des Unterrichts gemachten und vom Lehrer korrigierten Arbeiten einzugehen. Aus der Studie

geht hervor, einerseits, daß das, was der Lehrer lehrt, nur ein kleiner Teil von dem ausmacht, was die Schüler tatsächlich lernen und daß andererseits vieles außerhalb des eigentlichen Unterrichts gelernt wird.

Références

Artigue, M. (dir.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France – Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris: Vrin (rééd., 1972).

Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind.* New York, NY: Ballantine Books.

Bereiter, C. (1985). Towards a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research, 15*, 201-226.

Brousseau, G. (1982). D'un problème à l'étude *a priori* d'une situation didactique. *In Actes de la II[e] École d'été de didactique des mathématiques* (p. 15-60). Orléans: IREM d'Orléans.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1992). Didactique: What it can do for the teacher. *In* R. Douady et A. Mercier (dir.), *Research in didactique of mathematics, selected papers.* (p. 7-39). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. et Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 167-210.

Brousseau, G., Rouchier, A., Balacheff, N., Laborde, C. et Chevallard, Y. (1980). Address of members of the GRDM (France) at the ICME IV. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(1), 129-158.

Chevallard, Y. (1980). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *In* R. Douady et A. Mercier (dir.), *Research in didactique of mathematics, selected papers.* (p. 131-167). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. et Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique.* Marseille: IREM d'Aix-Marseille.

Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 32-42.

Fodor, J. A. (1979). Fixation de croyances et acquisition de concepts. *In* M. Piatelli-Palmarini (dir.), *Théories du langage, théories de l'apprentissage: le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky* (p. 219-242). Paris: Seuil.

Grossin, W. (1974). *Les temps de la vie quotidienne.* Paris: Mouton.

Gurvitch, G. (1963). *La vocation actuelle de la sociologie.* Paris: Presses universitaires de France.

Hart, K. (1981). *Children understanding of mathematics: 11-16.* Londres: John Murray.

Keitel, C., Otte, M. et Seeger, F. (1980). *Text – Wissen – Tätigkeit. Das Schulbuch im Mathematikunterricht.* Königstein: Scriptor-Verlag.

Mauss, M. (1966). *Anthropologie et sociologie.* Paris: Presses universitaires de France.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique.* Thèse d'université, Université de Bordeaux I.

Platon (v. 428–v. 348 av. J.C.). *Ménon* (1966). Paris: Garnier-Flammarion.

Platon (v. 428–v. 348 av. J.C.). *Phédon* (1991). Paris: Garnier-Flammarion.

Seeger, F. (1991). Interaction and knowledge in mathematics education. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 125-166.

Skemp, R. R. (1981). What is a good environment for the intelligent learning of mathematics? Do schools provide it? Can they? *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(2), 257-266.

Steinbring, H. (1991). Mathematics in teaching processes – The disparity between teacher and student knowledge. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(1), 65-107).

Tonnelle, J. (1980). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle.* Diplôme d'études approfondies, Université d'Aix-Marseille II et Université de Bordeaux I.

Verret, M. (1974). *Le temps des études.* Thèse d'état, Université de Paris V. Lille/Paris: Atelier de reproduction des thèses/Librairie Honoré Champion.