Nouvelles perspectives en sciences sociales

Une autre manière de modéliser les réseaux sociaux. Applications à l’étude de co-publications

A Way to Model Social Networks. Applications to the Study of Co-Publications

Monique Dalud-Vincent

Volume 12, numéro 2, mai 2017

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1040904ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1040904ar

Éditeur(s)

Prise de parole

ISSN

1712-8307 (imprimé)
1918-7475 (numérique)

Résumé de l'article

Cet article a pour objectif de montrer pourquoi et comment la prétopologie (domaine des mathématiques qui recouvre la théorie des graphes et la topologie) peut apporter une modélisation et un traitement plus souples et mieux adaptés des réseaux sociaux.

Une autre manière de modéliser les réseaux sociaux. Applications à l'étude de co-publications

Monique Dalud-Vincent
MEPS, Centre Max Weber, Lyon, France

Introduction

Les analyses de réseaux en sociologie[1] comme les outils et logiciels dédiés à ce type d'analyses (par exemple, Structure[2], Ucinet[3], Pajek[4]) reposent, la plupart du temps, sur une modéli-

---

1 Alain Degenne, « Un domaine d'interaction entre les mathématiques et les sciences sociales : les réseaux sociaux », *Mathématiques, informatique et sciences humaines*, nº 104, 1988, p. 5-18; Alain Degenne, « L'analyse des réseaux sociaux. Un survol à travers quelques jalons », *Bulletin de méthodologie sociologique*, nº 118, 2013, p. 22-43; Alain Degenne et Michel Forsé, *Les réseaux sociaux*, Paris, Armand Colin, 1994; John Barnes et Frank Harary «Graph Theory in Network Analysis», *Social Networks*, nº 5, 1983, p. 235-244; Pierre Mercklé, *Sociologie des réseaux sociaux*, Paris, Repères, La Découverte, 2004; Emmanuel Lazega, *Réseaux sociaux et structures relationnelles*, troisième édition, Paris, Presses universitaires de France, coll. « Que sais-je? », 2014.

2 Ronald Burt, *Structure. Version 4.2, Reference Manual*, Center for Social Sciences, New York, Columbia University, 1991.

3 Steve Borgatti, Martin Everett et Linton Freeman, *Ucinet IV, Version 1.0, Reference Manual*, Columbia, Analytic Technologie, 1992.

4 Wouter de Nooy, Andrej Mvar et Vladimir Batagelj, *Exploratory Social Network Analysis with Pajek*, Cambridge (MA), Cambridge University Press, 2005.

sation des réseaux en termes de graphes se référant à la théorie du même nom[5].

S'il existe des divergences théoriques entre, d'un côté, les utilisateurs « structuralistes » de la notion de réseau qui remettent en cause les explications par les catégories ou attributs[6] et, de l'autre côté, les sociologues et anthropologues penchant plus pour une utilisation telle que celle proposée par l'École de Manchester qui prône une approche au travers des « réseaux "multiplexes" ancrés dans les individus »[7], réseaux à la fois internes et externes à une organisation ou une institution[8], il est beaucoup moins fréquent de trouver dans la littérature des remises en cause d'une modélisation des réseaux en graphes[9].

Pourtant, d'autres modèles mathématiques existent qui permettraient, sans perdre les acquis de la théorie des graphes, de mieux appréhender les réseaux. On peut, bien sûr, penser aux matroïdes[10] ou encore aux hypergraphes[11]. Il existe, au-delà de ces deux éventualités, un autre domaine des mathématiques qui a déjà ouvert le champ des possibles de l'analyse de réseaux : la

5 Claude Berge, *Graphes et hypergraphes*, troisième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1983; Michel Gondran et Michel Minoux, *Graphes et algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979; Bernard Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes orientés vers les sciences économiques et sociales*, tomes 1 et 2, Paris, Dunod, 1969; Claude Flament, *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Mouton–Gauthier-Villars, 1968.

6 Voir, par exemple : Ronald Burt, *Structure. Version 4.2, reference manual*, *op. cit.*; Barry Wellman et Stephen Berkowitz, *Social Structures: A Network Approach*, Cambridge (MA), Cambridge University Press, 1988.

7 Michael Eve, « Deux traditions d'analyse des réseaux sociaux », *Réseaux*, nº 115, 2002, p. 190.

8 Voir, par exemple : Michael Eve, *ibid.*, p. 194-195; Maurizio Gribaudi (dir), *Espaces, Temporalités, Stratification. Exercices sur les réseaux sociaux*, Paris, École des hautes études en sciences sociales (EHESS), 1998.

9 On trouve des critiques dénonçant l'utilisation d'une technique de plus en plus sophistiquée, ce qui a pu être traduit par «flyes are killed with dynamite» (Jeremy Boissevain, «Network Analysis: A Reappraisal», *Current Anthropology*, vol. 20, nº 2, 1979, p. 393) mais la modélisation mathématique des réseaux en théorie des graphes n'est pas fondamentalement remise en cause.

10 Jean-Claude Fournier, « Introduction à la notion de matroïde (géométrie combinatoire) », *Publications Mathématiques d'Orsay*, Université Paris Sud, 2° trimestre, 1979.

11 Claude Berge, *Graphes et hypergraphes*, *op. cit.*

prétopologie qui a donné lieu à de nombreuses publications[12]. L'analyse des réseaux peut bénéficier de nombreux résultats déjà acquis dans ce domaine, étant entendu qu'il recouvre la topologie, la théorie des graphes et qu'il n'est étranger ni aux matroïdes ni aux hypergraphes[13].

Notre objectif sera de montrer comment une modélisation prétopologique peut apporter une ouverture dans le cadre des réseaux. En particulier, nous montrerons (première partie) les limites d'une modélisation en graphes en nous appuyant sur une

[12] Z. Belmandt, *Manuel de prétopologie et ses applications*, Paris, Hermès, 1993; Monique Dalud-Vincent, *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux : concepts et algorithmes*, thèse de doctorat, Université Lyon I, 1994; Monique Dalud-Vincent, « Modélisation prétopologique de la notion de réseau : un outil pour l'étude de la proximité en sociologie », dans Michel Bellet, Thierry Kirat et Christine Largeron (dir.), *Approches multiformes de la proximité*, Cachan, Hermès, coll. « Interdisciplinarité et nouveaux outils », 1998, p. 149-173; Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure «Pretopology as an Extension of Graph Theory: The Case of Strong Connectivity», *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 5, nº 4, 2001, p. 455-472; Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure,«Closed Sets and Closures in Pretopology», *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 50, nº 3, 2009, p. 391-402; Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Pretopology, Matroïdes and Hypergraphs», *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, nº 4, 2011, p. 363-375; Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Connectivities and Partitions in a Pretopological Space», *International Mathematical Forum*, Vol. 6, n° 45, 2011, p. 2201-2215; Monique Dalud-Vincent et Michel Lamure, «Connectivities for a Pretopology and its Inverse», *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 86, nº 1, 2013, p. 43-54.

[13] Un matroïde peut, dans tous les cas, être assimilé à un espace prétopologique particulier. On peut toujours associer une prétopologie à un hypergraphe. Plus précisément, on montre qu'étudier la connexité d'un hypergraphe équivaut à étudier la connexité (ou la forte connexité) d'un espace prétopologique de type V_S particulier. Ainsi, d'un point de vue formel, la prétopologie permet d'aboutir à des résultats concernant du même coup les matroïdes et les hypergraphes (Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Pretopology, Matroïdes and Hypergraphs», *op. cit.*).

recherche[14] qui portait sur une analyse de co-publications[15]. Nous donnerons ensuite (deuxième partie) quelques définitions en prétopologie afin d'expliquer comment cette modélisation peut répondre aux problèmes soulevés. Nous montrerons, enfin, comment proposer une décomposition prétopologique d'un réseau en utilisant les concepts de connexité (troisième partie).

Les limites de la théorie des graphes

Dans le cadre d'une recherche antérieure, nous avons construit une bibliographie recueillant plusieurs milliers de chercheurs ayant publié dans le domaine de la « mesure en éducation »[16]. À partir de cette base de données, nous avons « dessiné » les liens de co-publications à l'aide de Pajek. Pour ce faire, nous avons créé un graphe (au sens de la théorie des graphes) en considérant qu'un lien entre le chercheur A et le chercheur B existait (dans les deux sens) si A et B avaient une publication commune (éventuellement partagée avec d'autres chercheurs). Ainsi, si A, B et C ont publié un article ensemble, alors trois liens symétriques (*i.e.* réciproques) coexistent : le premier entre A et B, le deuxième

14 Monique Dalud-Vincent et Romuald Normand, « Analyse textuelle et analyse de réseaux : exemple du traitement d'une base de données bibliographiques à l'aide des logiciels Alceste et Pajek », *Bulletin de méthodologie sociologique*, nº 109, 2011, p. 20-38; Monique Dalud-Vincent et Romuald Normand, « Entre mesure, science et politique : construction et analyse d'un réseau international de co-publications dans le domaine de l'éducation », *Nouvelles perspectives en sciences sociales*, vol. 6, nº 2, 2011, p. 197-232.

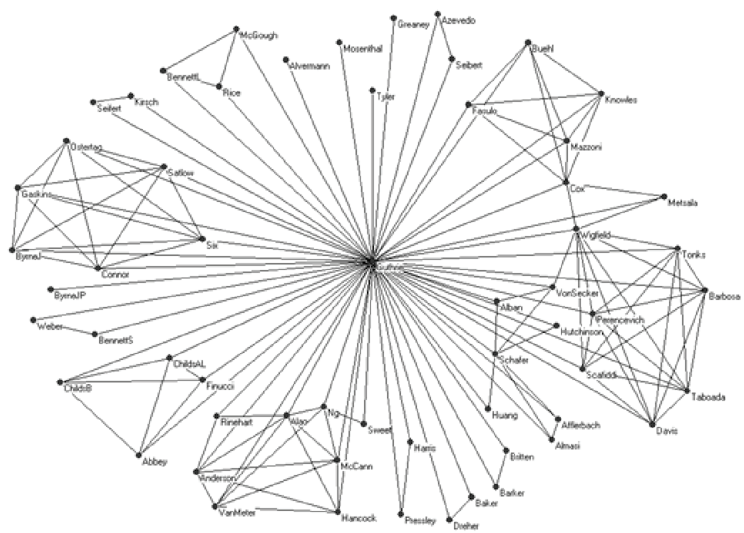
15 Nous avons déjà montré par ailleurs (Monique Dalud-Vincent, « Modélisation prétopologique de la notion de réseau : un outil pour l'étude de la proximité en sociologie », *op. cit.*) l'apport de la prétopologie dans le cas des réseaux de sociabilité (ouverture sur de nouvelles questions de type « individu à groupes », de nouveaux traitements notamment dans la manière d'étudier en simultané plusieurs types de liens).

16 Monique Dalud-Vincent et Romuald Normand, « Analyse textuelle et analyse de réseaux : exemple du traitement d'une base de données bibliographiques à l'aide des logiciels Alceste et Pajek », *op. cit.*; Monique Dalud-Vincent et Romuald Normand, « Entre mesure, science et politique : construction et analyse d'un réseau international de co-publications dans le domaine de l'éducation », *op. cit.*; Romuald Normand et Monique Dalud-Vincent, « Sciences de gouvernement de l'éducation et réseaux transnationaux d'experts : la fabrication d'une politique européenne », *Éducation et sociétés*, nº 29, 2012, p. 103-123.

entre B et C et le troisième entre A et C. Plus largement, deux auteurs qui appartiennent à une même référence admettent un lien symétrique entre eux quelle que soit leur place dans la référence.

Ainsi, cette modélisation aboutit au graphe de la figure 1 concernant notre base dont un extrait est donné en Annexe 1[17].

Figure 1 – Graphe des liens entre auteurs issus du tableau donné en Annexe 1



On remarque vite, avec l'exemple d'une publication à trois, qu'on aboutirait au même graphe si la bibliographie indiquait une publication commune (à deux) pour A et B, une autre publication commune (à deux) pour B et C, et une dernière publication commune (à deux) pour A et C. Avec les graphes, pour une référence contenant plus de deux auteurs, on fait comme si les auteurs avaient écrit deux à deux ensemble. Or, ce n'est pas la réalité. Mieux vaut considérer que chaque auteur de la référence a publié avec le groupe formé des autres auteurs.

17 Par souci de clarté, nous nous en tiendrons à un extrait seulement de cette base. De même, nous n'indiquons pas l'intégralité des références mais seulement les auteurs d'une même référence.

On a là une première limite d'une modélisation en graphes qui réduit tous les liens sous la forme d'un individu émetteur et d'un individu récepteur. La prétopologie permet de tenir compte de liens entre un individu et un (ou des) groupe(s). Elle va donc permettre de saisir le fait que, dans le cas d'une publication à trois auteurs, A est relié avec le groupe formé de B et C, que B est relié avec le groupe formé de A et C, et que C est relié au groupe formé de A et B[18]. Dans le cas des publications écrites à deux, elle indiquera des liens de type graphes.

La prétopologie pourra ainsi « mélanger » les deux types de liens en proposant, dans le même temps, de saisir des liens de type « individu à individu » et des liens de type « individu à groupe » (sans les réduire à des liens de type « individu à individu »). S'agissant de co-publications, on peut, de cette manière, tenir compte de la conception sociologique selon laquelle ce n'est pas la même chose, pour un auteur, de publier à deux ou à trois, *et cetera.* Moins il y a d'auteurs, plus la place de chacun est « reconnue » importante.

Une autre limite tient dans l'idée que ce n'est pas la même chose d'être le premier auteur, le deuxième auteur, *et cetera* d'une publication. On sait que le premier auteur est « mieux placé », l'ordre des auteurs peut être perçu comme un ordre d'importance.

En définitive, deux options (parmi d'autres possibles) pourront être testées avec la prétopologie, l'option qui tient compte de relations de type « individu-groupe » et l'option (cumulée à la première) qui tient compte de la place de l'auteur en donnant priorité au premier auteur. Mais pour présenter ces options, il nous faut quelques concepts prétopologiques.

1. Graphes, topologie et prétopologie

1.1. Notion d'espace prétopologique

Soit X un ensemble non vide. On note P(X) l'ensemble des parties de X.

18 Ce qui se généralise aux cas de publications à 4 ou plus selon le même procédé.

On appelle prétopologie sur X, toute application adh de P(X) dans P(X) qui vérifie :

i - adh (ø) = ø

ii - $\forall A \in P(X)$, $A \subset adh(A)$

(X, adh) est appelé espace prétopologique. adh est encore appelée adhérence.

On définit 4 types particuliers d'espaces prétopologiques de la manière suivante :

1- (X,adh) est de type V si et seulement si $\forall A \in P(X)$, $\forall B \in P(X)$,

$A \subset B$ implique $adh(A) \subset adh(B)$.

On dit également que adh est de type V.

2- (X,adh) est de type V_D si et seulement si $\forall A \in P(X)$, $\forall B \in P(X)$,

$adh(A \cup B) = adh(A) \cup adh(B)$.

On dit également que adh est de type V_D.

3- (X,adh) est de type V_S si et seulement si $\forall A \in P(X)$, $adh(A) = \bigcup_{x \in A} adh(\{x\})$.

On dit également que adh est de type V_S.

4- Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V_D.

(X,adh) est un espace topologique si et seulement si $\forall A \in P(X)$,

$adh(adh(A)) = adh(A)$.

On dit également que adh est une topologie[19].

Propriétés[20]

Soit (X,adh) un espace prétopologique.

Si (X,adh) est de type V_S alors (X,adh) est de type V_D.

Si (X,adh) est de type V_D alors (X,adh) est de type V.

---

19 Cette définition est équivalente à celle de Casimir Kuratowski (Casimir Kuratowski, *Topologie*, Varsovie, 1952). Elle montre que la prétopologie recouvre la topologie.

20 Voir Z. Belmandt, *Manuel de prétopologie et ses applications*, *op. cit.*

Pour une situation donnée, on peut construire de multiples prétopologies[21]. L'adhérence définit les « proches » de chaque partie de X. En voici quelques exemples.

Exemple 1

Soit X un ensemble non vide et R une relation binaire dans X.

La prétopologie des descendants, notée a_d, est caractérisée par l'application adhérence suivante :

$\forall A \in P(X)$, $a_d(A) = \{ x \in X / R(x) \cap A \neq \emptyset \} \cup A$

avec $R(x) = \{ y \in X / x \, R \, y \}$ ($R(x)$ est l'ensemble des descendants de x par R).

Elle est de type V_S. Elle permet de formaliser toutes les applications en théorie des graphes[22]. Pour cette prétopologie, les adhérents d'un élément[23] sont, en plus de l'élément lui-même, les ascendants (au sens des graphes) de cet élément. Et les adhérents d'une partie A non vide sont, en plus des éléments de A, les éléments ayant au moins un descendant (toujours au sens des Graphes) dans A[24]. Ainsi le graphe de la Figure 1 pourrait être modélisé à l'aide de cette prétopologie. On voit ainsi que :
$a_d(\{ \text{Guthrie} \}) = \{ x \in X / R(x) \cap \{ \text{Guthrie} \} \neq \emptyset \} \cup \{ \text{Guthrie} \} = X$ si on note X l'ensemble de tous les auteurs. Sont considérés comme adhérents les auteurs ayant partagé une publication avec Guthrie (éventuellement avec d'autres co-auteurs).

21 On pourra même faire une réunion, une intersection ou une composition de plusieurs prétopologies (Monique Dalud-Vincent, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Closed Sets and Closures in Pretopology», *op. cit.*).

22 Les notions de chemins, chaînes, connexités… se généralisent en prétopologie et restent tout à fait compatibles avec la théorie des graphes (Z. Belmandt, *Manuel de prétopologie et ses applications*, *op. cit.*).

23 Par abus de langage, pour ne pas surcharger le texte, nous parlerons des adhérents d'un élément plutôt que des adhérents d'un singleton (*i.e.* une partie ne contenant qu'un élément).

24 Plus simplement, si R donne les relations d'amitié entre personnes, l'adhérence d'une personne contient cette personne et celles qui l'ont choisie comme amie. L'adhérence d'un groupe de personnes contient toutes les personnes du groupe ainsi que toute autre personne ayant au moins un ami dans ce groupe.

Exemple 2

Dans le cas précis qui nous intéresse (Annexe 1), si X est la population composée de l'ensemble des auteurs et si A est une partie de X, on peut construire une prétopologie de type V (sans être de type V_S ou de type V_D) vérifiant :
adh(A) = { x ∈X/ x a publié avec le groupe A } ∪ A
avec les deux conditions suivantes :

1. adh (ø) = ø
2. A ⊂ B implique adh(A) ⊂ adh(B)[25].

Cette fois, pour appartenir à une adhérence, il faut que, pour une référence, tous ses co-auteurs soient déjà dans l'adhérence précédente. En procédant de la sorte, il est nécessaire que l'auteur ait publié à deux pour que son adhérence ne contienne pas que lui-même.

Cette prétopologie est bien de type V (sans être de type V_S ou de type V_D). Un exemple suffit à le montrer. En effet, adh({ Azevedo }) = { x ∈X/ x a publié avec le groupe { Azevedo } } ∪ { Azevedo }= { Azevedo } (personne n'a publié à deux avec cet auteur). Par ailleurs, adh({ Seibert }) = { x ∈X/ x a publié avec le groupe { Seibert } } ∪ { Seibert } = { Seibert } (même raison que pour Azevedo). Donc adh({ Azevedo }) ∪ adh({Seibert }) = { Azevedo , Seibert }. Or adh({Azevedo , Seibert }) = { Azevedo , Seibert , Guthrie} (Guthrie a publié avec le groupe formé par ces deux auteurs, sans avoir publié avec chacun d'eux!). On obtient donc que adh({ Azevedo }) ∪ adh({Seibert }) n'est pas égale à (mais contenue strictement dans) adh({Azevedo, Seibert }).

En pratique, on peut repérer les adhérences successives de l'auteur Guthrie et constater que tous les auteurs n'appartiennent pas à la première adhérence. En effet, adh({ Guthrie }) = { x ∈X/ x a publié avec le groupe { Guthrie } } ∪ { Guthrie } = { Guthrie, Kirsch, Wigfield, Mosenthal, Davis, Alao, Tyler, Cox, Seifert, Greaney, Dreher, Alvermann, ByrneJP }. Il s'agit de Guthrie et des auteurs ayant publié à deux avec lui. On peut

25 Cette condition indique que si un auteur est adhérent à une partie A (ensemble d'auteurs) alors il est adhérent à tout sur-ensemble de A (toute partie contenant A).

poursuivre et repérer l'adhérence suivante : adh(adh({ Guthrie })) = adh({ Guthrie, Kirsch, Wigfield, Mosenthal, Davis, Alao, Tyler, Cox, Seifert, Greaney, Dreher, Alvermann, ByrneJP }) ={ Guthrie, Kirsch, Wigfield, Mosenthal, Davis, Alao, Tyler, Cox, Seifert, Greaney, Dreher, Alvermann, ByrneJP, Metsala, VonSecker, Perencevich, Baker}. Là encore, tous les auteurs n'appartiennent pas à cette adhérence qui contient les auteurs de la première adhérence auxquels on ajoute chaque auteur ayant publié avec un groupe d'auteurs de cette première adhérence (tous les co-auteurs de cet auteur sont donc déjà dans la première adhérence). On remarque que adh(adh(adh({ Guthrie })))= adh(adh({ Guthrie })) $\subset$ X. Les auteurs n'appartenant pas à la dernière adhérence appartiennent à des références pour lesquelles au moins deux auteurs ne sont pas déjà présents dans l'adhérence précédente.

Exemple 3

Une autre alternative, plus exigeante, serait la suivante. Si X est la population composée de l'ensemble des auteurs et si A est une partie de X, on peut construire une prétopologie de type V (sans être de type V_S ou de type V_D) en posant :

adh(A) = { x $\in$X/ x a publié avec le groupe A et x est le premier auteur de la référence } $\cup$ A

avec les deux conditions suivantes :

1. adh (ø) = ø
2. A $\subset$ B implique adh(A) $\subset$ adh(B).

Cette prétopologie fait évoluer beaucoup moins vite l'adhérence pour un même ensemble puisqu'un auteur, pour être adhérent, doit être à la fois positionné en première place dans la référence et avoir tous ses co-auteurs dans l'adhérence précédente.

On peut repérer à nouveau les adhérences successives de l'auteur Guthrie avec adh({ Guthrie }) = { x $\in$X/ x a publié avec le groupe { Guthrie } et x est premier auteur de la référence } $\cup$ { Guthrie } = { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield}. Il s'agit de Guthrie et des auteurs ayant publié à deux avec lui en étant situés en premier dans la référence. On peut poursuivre et repérer l'adhérence suivante : adh(adh({

Guthrie })) =adh({ Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield}) = { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield, Baker}. On remarque que l'adhérence suivante est identique.

Cette prétopologie est bien de type V (sans être de type V_S ou de type V_D). En effet, adh({ Harris }) = { x ∈X/ x a publié avec le groupe { Harris } et x est le premier auteur de la référence } ∪ { Harris }= { Harris}. D'où adh({ Harris }) ∪ adh({ Guthrie })= { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield, Harris }. Or adh({Guthrie , Harris }) = { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield, Harris, Pressley} (Pressley a publié avec le groupe formé par ces deux auteurs en étant premier auteur, sans avoir publié avec chacun d'eux!). On obtient donc que adh({ Guthrie }) ∪ adh({Harris }) n'est pas égale à (mais contenue strictement dans) adh({Guthrie, Harris }).

Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons plus particulièrement aux notions de connexités qui sont fréquemment utilisées en analyse de réseaux. Nous montrons comment la prétopologie généralise ces notions dans le cas des prétopologies de type V.

1.2. Forte connexité et connexité en prétopologie

Fermé et fermeture

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V. Soit $A \in P(X)$.

A est fermé si et seulement si adh(A) = A.

On appelle fermeture de A le sous-ensemble de X noté F(A) qui est le plus petit fermé contenant A.

Connexité et forte connexité

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V.

(X,adh) est fortement connexe si et seulement si $\forall C \in P(X)$, $C \neq \emptyset$, $F(C) = X$.

(X,adh) est connexe si et seulement si $\forall C \in P(X)$, $C \neq \emptyset$,

$F(C) = X$ ou $F(X\text{-}F(C)) \cap F(C) \neq \emptyset$.

Sous-ensemble et connexité (resp.[26] forte connexité)

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V. Soit $A \in P(X)$.

On note F_A la fonction fermeture trace de la fermeture de (X,adh) sur A. On a $\forall\ C \in P(A)$, $F_A(C) = F(C) \cap A$.

Soit $A \in P(X)$ avec A non vide.

A est un sous-ensemble connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) si et seulement si A muni de F_A est connexe (resp. fortement connexe). On obtient donc :

A est sous-ensemble fortement connexe si et seulement si $\forall C \in P(A)$, $C \neq \emptyset$, $F(C) \cap A = A$.

A est sous-ensemble connexe si et seulement si $\forall C \in P(A)$, $C \neq \emptyset$, $F(C) \cap A = A$ ou $F(A-(F(C) \cap A)) \cap F(C) \cap A \neq \emptyset$.

A est composante[27] connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) si et seulement si A est sous-ensemble connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) et $\forall\ B \in P(X)$, $A \subset B$ et $A \neq B$, B n'est pas sous-ensemble connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh).

La famille des composantes connexes (resp. fortement connexes) de (X,adh) est une partition de X[28].

Sous-espace et connexité (resp. forte connexité)

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V. Soit $A \in P(X)$.

On définit la prétopologie induite par adh sur A, notée a_A, par :

$\forall C \in P(A)$, $a_A(C) = adh(C) \cap A$.

On note $F°_A$ la fermeture de a_A.

(A, a_A) (ou plus simplement A) est dit sous-espace prétopologique de (X,adh).

(A, a_A) est un sous-espace prétopologique connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) si et seulement si (A, a_A), en tant qu'espace prétopologique, est connexe (resp. fortement connexe).

26 « Resp. » est utilisé pour « respectivement » dans la suite de l'article dans le seul but d'alléger les écritures mathématiques.

27 On montre (Z. Belmandt, *Manuel de prétopologie et ses applications*, *op. cit.*) que la notion de composante est tout à fait compatible avec celle donnée en théorie des graphes. Il suffit d'appliquer la prétopologie des descendants.

28 Z. Belmandt, *ibid.*

On peut dès lors s'intéresser à la construction d'un nouveau contexte défini de la manière suivante[29] :

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V. Soit $A \in P(X)$ avec A non vide.

(A,a_A) est plus grand sous-espace connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) si et seulement si (A, a_A) est sous-espace connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh) et $\forall$ $B \in P(X)$, $A \subset B$ et $A \neq B$, (B, a_B) n'est pas sous-espace connexe (resp. fortement connexe) de (X,adh).

À partir de cette définition, on démontre entre autres les propositions suivantes[30] :

Proposition 1[31]

Soit $A \in P(X)$ avec A non vide.

i- Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V.
A est composante connexe de (X,adh)
$\Leftrightarrow$ A est plus grand sous-espace connexe de (X,adh).

ii- Soit (X,adh) espace prétopologique de type V_S.
A est composante fortement connexe de (X,adh)
$\Leftrightarrow$ A est plus grand sous-espace fortement connexe de (X,adh).

29 Monique Dalud-Vincent, *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux : concepts et algorithmes*, *op. cit.*

30 *Ibid.*

31 Cette proposition montre qu'en graphes (*i.e.* dans le cas de la prétopologie des descendants de type V_S), les notions de plus grand sous-espace fortement connexe et de composante fortement connexe sont équivalentes. Dans le cas d'une prétopologie de type V, on complète la notion de composante en mettant en évidence d'autres contextes à l'intérieur (proposition 3) même des composantes fortement connexes qui sont les plus grands sous-espaces fortement connexes. En termes de chemins (il existe un chemin dans (X,adh) de B vers A, deux parties non vides de X, si et seulement si $B \subset F(A)$), ces deux notions se différencient par le fait que dans le cas d'une composante fortement connexe notée A, quels que soient deux éléments x et y de A, il existe un chemin de x vers y dans (X,adh) (le chemin peut donc « passer » par des éléments extérieurs à A) alors que, dans le cas d'un plus grand sous-espace fortement connexe A, quels que soient x et y de A, il existe un chemin de x vers y dans (A, a_A) (tout chemin ne peut «passer» que par des éléments appartenant à A).

Proposition 2

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V.

La famille des plus grands sous-espaces connexes (resp. fortement connexes) de (X,adh) est une partition de X.

Proposition 3

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V.

Soit $\{ F_j, j\in J \}$ la famille des composantes fortement connexes de (X,adh).

Soit $\{ E_k, k\in K \}$ la famille des plus grands sous-espaces fortement connexes de (X,adh).

$\forall j\in J$, il existe $K_j \subset K$, $F_j = \bigcup_{k\in K_j} E_k$.

Les définitions et résultats précédents permettent de repérer, par exemple, les composantes[32] et plus grands sous-espaces fortement connexes dans le cas des trois exemples précédents.

Exemple 1 (suite)

La prétopologie des descendants appliquée à la figure 1 montre qu'une seule composante fortement connexe (et donc un plus grand sous-espace fortement connexe car il s'agit du type V_S) apparaît qui est X (ensemble de tous les auteurs). En effet, en repérant les adhérences successives de chaque auteur, on parvient à la fermeture qui est systématiquement X.

Exemple 2 (suite)

On a remarqué que adh(adh(adh({ Guthrie })))= adh(adh({ Guthrie })) ⊂ X donc F({ Guthrie }) = adh(adh({ Guthrie })) = { Guthrie, Kirsch, Wigfield, Mosenthal, Davis, Alao, Tyler, Cox, Seifert, Greaney, Dreher, Alvermann, ByrneJP, Metsala, VonSecker, Perencevich, Baker}. On s'aperçoit que Guthrie, Kirsch, Wigfield, Mosenthal, Davis, Alao, Tyler, Cox, Seifert, Greaney, Dreher, Alvermann, ByrneJP ont tous la

32 À savoir Monique Dalud-Vincent, *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux : concepts et algorithmes*, *op. cit.* : la réunion de tous les singletons de X ayant la même fermeture est une composante fortement connexe.

même fermeture et forment donc ensemble une seule composante fortement connexe. En effet, chaque auteur (autre que Guthrie) admet comme adhérent Guthrie (ayant publié à deux avec lui), de ce fait sa fermeture contient celle de Guthrie. Chaque auteur en dehors de cette composante forme une composante à lui seul (son adhérence ne contient que lui-même puisqu'il s'agit d'un auteur n'ayant pas publié à deux). Dans ce cas (particulier car la composante la plus fournie ne contient que des auteurs ayant écrit à deux), les plus grands sous-espaces fortement connexes sont identiques aux composantes.

Exemple 3 (suite)

Nous avons adh(adh({ Guthrie })) = { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield, Baker}. L'adhérence suivante est identique, ce qui signifie que F({ Guthrie }) = { Guthrie, Alao, Alvermann, ByrneJP, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield, Baker}. Mais, dans ce cas, seuls Guthrie, Alao, Cox, Dreher, Kirsch, Wigfield admettent la même fermeture, ces auteurs forment donc une composante. Chaque autre auteur est une composante à lui seul (personne n'ayant publié seul avec lui en deuxième place). Dans ce cas (encore particulier pour les mêmes raisons que dans l'exemple précédent), les plus grands sous-espaces fortement connexes sont identiques aux composantes. L'exemple suivant montre qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Exemple 4

Nous appliquerons, dans cet exemple, la même prétopologie que pour l'exemple 2 mais sur un autre extrait de notre base (Annexe 2). Une première composante fortement connexe contient Demeuse, Baye, Scheerens, Creemers, Reynolds, DeJong, Stringfield, Teddlie, Herman. Ces individus ont la même fermeture. On remarque que Bosker est un « passage obligé » pour fabriquer cette composante sans pour autant en faire partie! C'est pourquoi, cette composante contient deux plus grands sous-espaces fortement connexes : d'un côté, Demeuse, Baye, Scheerens, Creemers, Reynolds, DeJong et, de l'autre, Stringfield, Teddlie, Herman. Certains restent composantes singletons (Bird ou encore Straeten, voire Rakotomalala qui ne publient pas à deux). Une autre composante contient Bosker et Dekkers. Une dernière composante contient tous les auteurs restants. Cette composante n'est constituée que d'un seul plus grand sous-espace. On remarque d'ailleurs ici qu'un plus grand sous-espace n'est pas seulement le groupement d'auteurs ayant publié à deux de proche en proche : en effet, ce sont des publications à trois qui permettent les passages d'un chemin[33] entre Mingat/Chuard et Jarousse/Leroy-Audouin (dans un sens comme dans l'autre).

2. Décomposition prétopologique d'un réseau

La décomposition exposée ici avait initialement pour objectif de proposer une alternative, à la fois sociologique et mathématique, aux notions d'équivalence structurale et d'équivalence régulière. Formulée en graphes[34], l'hypothèse sous-jacente à la notion d'équivalence structurale est la suivante : deux sommets sont équivalents, et donc classés ensemble, si (et seulement si) ils sont en relation avec les mêmes sommets. Appliquée aux co-publications, elle reviendrait donc à classer ensemble des auteurs ayant publié exactement avec les mêmes auteurs[35]. L'hypothèse sous-jacente à la notion d'équivalence régulière est la suivante : « Thus, two actors are regularly equivalent if they are equally related to equivalent others[36] ». On peut donc être classés ensemble sans nécessairement avoir de liens (de co-publications par exemple) avec les mêmes personnes, il suffit d'être reliés à d'autres (considérés

33 En prétopologie, il existe un chemin dans (X,adh) de B vers A, deux parties non vides de X, si et seulement si $B \subset F(A)$.

34 Douglas White et Karl Reitz, «Graph and Semigroup Homomorphisms on Networks of Relations», *Social Networks*, n° 5, 1983, p. 193-234.

35 Plus exactement, d'après une modélisation en graphes, des auteurs partageant les mêmes co-auteurs, ce qui ne veut pas dire que chacun ait publié seul avec chaque co-auteur ! Un co-auteur est ici un auteur appartenant à une même référence. Cette remarque est aussi valable pour l'équivalence régulière.

36 Steve Borgatti et Martin Everett, «The Class of All Regular Equivalences: Algebraic Structure and Computation», *Social Networks*, n° 11, 1989, p. 65-88. On montre que toute équivalence structurale est une équivalence régulière (Patrick Doreian, «Equivalence in a Social Network», *Journal of Mathematical Sociology*, n° 3, 1988, p. 243-282).

eux-mêmes comme équivalents) « de la même manière », éventuellement donc dans des contextes différents (par exemple, en publiant sur des thèmes très différents). Ces deux notions[37] restent très fortement liées à une conception « structuraliste » au sens où l'individu serait contraint par l'ensemble des relations qu'il entretient avec autrui et son comportement en serait la conséquence, d'où la recherche d'individus se ressemblant structuralement ou régulièrement pour « expliquer » le comportement. Notre conception suggère d'autres hypothèses, s'appuyant sur le passé de l'individu et plus largement sur ses caractéristiques, pour (déjà) « expliquer » sa position (supposée plus ou moins centrale) dans la structure étudiée. En appliquant le dicton « qui s'assemble se ressemble », nous créons des groupes (ou « cercles d'amis » ou encore « cercle de co-publiants ») présentant une certaine cohésion (par exemple, en publiant sur un même thème ou domaine). Puis nous considérons qu'un groupe n'est pas homogène et qu'il présente des individus plus en périphéries (moins attachés au groupe, plus en marge dans le domaine) alors que d'autres seront plus au centre (plus reliés aux autres du groupe, des « références » dans le domaine). Ainsi, selon ses caractéristiques et son histoire,

37 Nous avons montré (Monique Dalud-Vincent, *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux : concepts et algorithmes*, *op. cit.*; Monique Dalud-Vincent, Michel Forsé et Jean-Paul Auray, «An Algorithm for Finding the Structure of Social Groups», *Social Networks*, nº 16, 1994, p. 137-162) que les notions d'équivalence structurale et d'équivalence régulière ne permettent pas, telles qu'elles sont définies mathématiquement, de construire une équivalence particulière sur un jeu de données mais « seulement » de constater si une équivalence construite *a priori* est ou non structurale et/ou régulière. Nous avons montré aussi que les définitions proposées étant très (trop?) strictes (dans la mesure où on ne trouve pas, ou si peu, dans la réalité des individus ayant exactement les mêmes relations par exemple), les utilisateurs ont « dû », en utilisant des métriques (Structure, Concor, Rege sont des exemples de tels outils), assouplir ces définitions inopérationnelles en l'état. Ainsi, nous avons proposé d'autres hypothèses sociologiques, basées sur un lien étroit supposé entre attributs et position dans le réseau (de sociabilité par exemple), et opérationnalisé de nouveaux concepts en gardant la nature (non continue) des données traitées. Car il ne faut pas oublier que la théorie des graphes (comme la prétopologie) ne sont pas des modèles *a priori* statistiques ou quantitatifs mais bien des outils formels pour traiter des aspects qualitatifs (comme la recherche de la configuration d'un groupe non nécessairement très fourni).

un individu aura tendance à se situer plutôt dans telle classe et plus largement dans tel groupe.

Techniquement, cette classification des sommets (des auteurs par exemple) est basée sur une décomposition des plus grands sous-espaces (fortement) connexes. On peut, en effet, généraliser, en prétopologie, l'algorithme déjà présenté dans sa version graphes[38] sur la base des concepts suivants :

Soit (X,adh) un espace prétopologique de type V. Soit A $\in$ P(X) avec A non vide et A sous-espace connexe (resp. FC[39]) de (X,adh).

- b$\in$A est point d'articulation de A dans (X,adh) si (A-{b}, $adh_{A-\{b\}}$) n'est pas sous-espace connexe (resp. FC) de (X, adh).
- Soit b$\in$A avec b point d'articulation de A dans (X,adh). b est point d'articulation d'ordre 1 de A dans (X,adh) si et seulement si le plus petit des plus grands sous-espaces connexes (resp. FC) de (A-{b}, $adh_{A-\{b\}}$) a pour cardinal 1.
- Soit c$\in$A. c est point fragile de A dans (X,adh) si et seulement si il existe b$\in$A-{c} tel que b soit point d'articulation d'ordre 1 de A dans (X,adh) et tel que {c} soit plus grand sous-espace connexe (resp. FC) de (A-{b}, $adh_{A-\{b\}}$).

38 Monique Dalud-Vincent, Michel Forsé et Jean-Paul Auray, «An Algorithm for Finding the Structure of Social Groups», *op. cit.*; Monique Dalud-Vincent, « Graphes et classification : l'exemple des tables de mobilité sociale », *Mathématiques et sciences humaines*, n° 147, 1999, p. 47-70; Monique Dalud-Vincent, « Réso comme outil de structuration des catégories socioprofessionnelles », *Bulletin de méthodologie sociologique*, n° 76, 2002, p. 5-25; Monique Dalud-Vincent, « Comparaison des tables de mobilité sociale des enquêtes FQP de 1985 et de 2003 à l'aide des outils de la théorie des graphes : vers une continuité plus marquée entre les catégories socioprofessionnelles », *Mathématiques et sciences humaines*, n° 185, 2009, p. 37-67. La version Graphes de Réso est téléchargeable à l'adresse suivante : http://moniquedaludvincent.jimdo.com/logiciel-réso/. Par ailleurs, une version Graphes sous forme d'extension au logiciel R est en cours de réalisation par Julien Barnier, informaticien au Centre Max Weber, et sera prochainement accessible (https://github.com/juba/reso).

39 La notation « FC » remplace ici « fortement connexe ».

L'algorithme[40] donne enfin la démarche de décomposition des plus grands sous-espaces.

- décomposer (X,adh) en *SEP C*
- classer ensemble tous les *SEP C* singletons
- Tant que l'ensemble des *SEP C* non singletons n'est pas vide faire :
    - considérer l'un des *SEP C*
    - retirer ce *SEP C* de l'ensemble des *SEP C*
    - rechercher PA(*SEP C*), PA1(*SEP C*) et PF(*SEP C*)
    - si PF(*SEP C*) est non vide
    - alors : classer ensemble les éléments de PF(*SEP C)*
    - sinon :
        - si le nombre de points d'articulation d'ordre 1 déjà repérés, non classés et présents dans ce *SEP C* est strictement positif
        - alors : classer ensemble ces points d'articulation d'ordre 1
        - sinon :
            - si le nombre de points d'articulation déjà repérés, non classés et présents dans ce *SEP C* est strictement positif
            - alors : classer ensemble ces points d'articulation
            - sinon : classer ensemble les points restants du *SEP C*
    - considérer le sous-espace obtenu après retrait des éléments classés
    - décomposer en *SEP C* les éléments restants du *SEP C*
    - si le nombre de *SEP C* singletons est strictement positif
    - alors : classer ensemble ces *SEP C* singletons
    - inclure chaque *SEP C* non singleton dans l'ensemble des *SEP C*
- Fin Tant que.

---

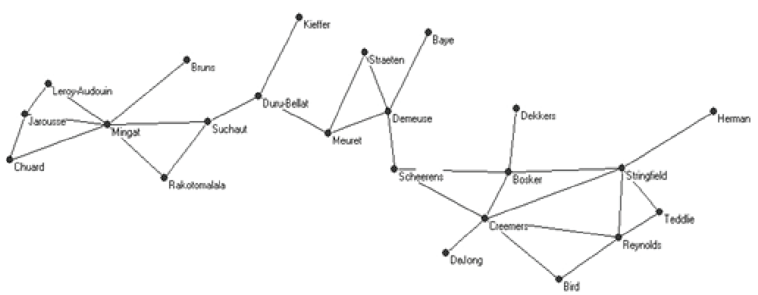
40 Les abréviations suivantes sont utilisées : SEP remplace « plus grand sous-espace »; C remplace soit « connexe », soit « fortement connexe »; PA remplace « point d'articulation »; PA1 remplace « point d'articulation d'ordre 1 »; PF remplace « point fragile ».

Il s’agit de décomposer chaque sous-espace (fortement) connexe (chaque sous-espace étant perçu comme un contexte) en progressant depuis la périphérie vers le centre du sous-espace. Les périphéries sont déterminées sur la base de la fragilité des positions (un élément étant déclaré « fragile » si le retrait d’un seul autre élément (appelé point d’articulation d’ordre 1) le rend sous-espace (fortement) connexe singleton). On construit ainsi des couches de « points fragiles » jusqu’à parvenir à une (ou des) partie(s) plus centrale(s) (moins fragile(s). Lorsqu’il n’y a pas de points fragiles, l’algorithme classe ensemble les points d’articulation (intermédiaires par leur position) afin de poursuivre la décomposition[41].

Exemple 5

Appliquons, pour commencer, cet algorithme sur le graphe (au sens de la théorie des graphes) que l’on peut représenter à partir de l’Annexe 2 (Figure 2). On utilise donc ici la prétopologie des descendants comme dans l’exemple 1.

Figure 2 – Graphe des liens entre auteurs issus du tableau donné en Annexe 2.



[41] Les résultats de Réso sont donnés sous forme graphique indiquant les différentes classes, leur caractérisation (points fragiles, etc.) et leur ordre d’apparition ainsi que les liens entre elles (en version graphes, un lien existe entre deux classes C1 et C2 si un lien existe entre un élément de C1 et un élément de C2).

Une seule et unique composante fortement connexe[42] (*i.e.* un seul plus grand sous-espace fortement connexe) apparaît qui présente 6 points fragiles[43] classés en première périphérie puis retirés (Bruns, Kieffer, Baye, Dekkers, DeJong et Herman). Une unique composante demeure. Aucun point fragile n'est alors mis en évidence, on classe donc ensemble puis on retire les points d'articulation ayant mis en évidence la première périphérie (Mingat, Duru-Bellat, Demeuse, Bosker, Creemers et Stringfield). Ces individus sont des intermédiaires entre périphérie et partie(s) plus centrale(s). Plusieurs composantes fortement connexes apparaissent alors :

- Une composante singleton isole Scheerens qui est classé seul,
- Une composante est constituée de Bird, Reynolds et Teddlie qui se décompose en deux points fragiles (Teddlie et Bird) et une composante singleton (Reynolds),
- Une autre composante à trois (Leroy-Audouin, Jarousse et Chuard) avec deux points fragiles (Leroy-Audouin et Chuard) et une composante singleton (Jarousse),
- Une composante « duo » (Meuret, Straeten) dans laquelle Meuret est classé point d'articulation (autre que d'ordre 1 ayant été repéré comme tel auparavant), ce qui laisse Straeten composante singleton,
- Une même configuration pour le dernier « duo » (Suchaut, Rakotomalala) avec Suchaut en point d'articulation et Rakotomalala en composante singleton.

42 Il s'agit d'un seul groupe de co-publiants tous liés directement ou indirectement. Rappelons que deux auteurs sont liés s'ils appartiennent à une même référence, quel que soit le nombre d'auteurs dans la référence et quelle que soit leur place respective dans cette référence.

43 Les concepts de point d'articulation d'ordre 1 et de point fragile permettent de repérer des auteurs périphériques, considérés comme en marge dans la mesure où il s'agit ici d'auteurs n'ayant publié qu'avec un seul auteur du groupe, auteur qui « joue » donc un rôle d'intermédiaire (*i.e.* point d'articulation). Plutôt que de traiter de proximités à l'aide d'une distance entre auteurs, on permet ainsi de prendre en compte la structure (globale et locale) plus « qualitative » des relations entre individus.

Du point de vue de l'analyse, ce réseau d'auteurs[44] se présente comme un unique ensemble assez morcelé avec six auteurs plus en marge, reliés au groupe grâce à des co-publications avec un seul auteur du groupe (chaque fois différent). Plutôt qu'un centre, il compte cinq parties plus centrales (contenant entre un et trois auteurs).

Exemple 4 (suite)

Si, par contre, on utilise la prétopologie de l'exemple 2 sur l'extrait de l'Annexe 2, les plus grands sous-espaces fortement connexes sont au nombre de trois singletons et un « duo » non décomposable ainsi que trois autres plus grands sous-espaces fortement connexes. On multiplie le nombre de contextes par rapport à une modélisation et au traitement de type graphes[45].

Le plus grand sous-espace contenant Demeuse, Baye, Scheerens, Creemers, Reynolds, DeJong se décompose en une première périphérie de point fragiles[46] (Baye, DeJong, Reynolds), puis en une deuxième couche de points fragiles (Creemers et Demeuse) et finit par un auteur plus central (Scheerens).

Le plus grand sous-espace contenant Stringfield, Teddlie, Herman se décompose en deux points fragiles (Teddlie et Herman) et un singleton (Stringfield) plus au centre.

Le plus grand sous-espace contenant 9 auteurs (Chuard, Mingat, Jarousse, Leroy-Audouin, Bruns, Suchaut, Duru-Bellat, Meuret, Kieffer) se décompose en une première périphérie de

44 Rappelons qu'il ne s'agit que d'un extrait des données initiales. L'interprétation ne serait plus la même et permettrait une vision plus globale si on considérait un réseau plus important. C'est pourquoi il faut rester très modeste notamment sur l'interprétation des classes qu'il faudrait mener en ayant une connaissance approfondie des auteurs et de leurs écrits.

45 Ce qui s'explique par la définition d'une adhérence plus stricte (*i.e.* une définition plus stricte de la proximité) : pour être adhérent à un ensemble, il ne suffit plus d'appartenir à une même référence (quel que soit le nombre d'auteurs) qu'un auteur de cet ensemble, il faut que tous ses co-auteurs d'une référence appartiennent à cet ensemble.

46 Là encore, un point fragile est un auteur qui est en marge dans la mesure où sa présence dans le groupe tient à la présence d'un autre (appelé point d'articulation d'ordre 1).

points fragiles (Meuret, Kieffer, Bruns, Chuard, Jarousse, Leroy-Audouin) puis une deuxième périphérie (Mingat et Duru-Bellat) qui laisse au centre Suchaut.

Cette prétopologie donne d'emblée une vision plus fine[47] qu'une modélisation en graphes, en proposant une proximité mieux adaptée (et donc plus stricte), puisqu'il s'agit de prendre en compte l'idée selon laquelle on ne peut pas considérer qu'une publication à trois équivale à trois publications à deux… Il apparaît ainsi, non plus un seul groupe, mais sept groupes. Seuls trois d'entre eux sont suffisamment fournis pour être décomposés[48]. On remarque même que trois auteurs sont isolés dès la construction des contextes (Bird, Straeten et Rakotomalala) alors qu'ils étaient dans les classes plus centrales avec une modélisation en graphes. Est pris en considération ici le fait qu'ils ne publient pas à deux.

Conclusion

La prétopologie ne s'oppose pas à la théorie des graphes, elle l'englobe en généralisant ses concepts comme celui de connexité. Elle permet souvent, en particulier dans le domaine des réseaux sociaux, une modélisation mieux adaptée et plus souple. Ainsi, dans le cas d'un réseau de co-publications, elle permet de mieux rendre compte de la réalité des liens entre auteurs (qui, en graphes, sont systématiquement résumés par des liens d'individus à individus comme s'il s'agissait uniquement de publications à deux auteurs, ce qui n'est bien souvent pas le cas).

Au-delà de cette lecture mieux appropriée des données bibliographiques, la prétopologie propose des outils d'analyse du

47 Il est bien sûr possible de construire plusieurs prétopologies, chacune mettant l'accent sur tel ou tel aspect des données. Il ne s'agit pas de nier l'apport d'une approche en graphes (qui correspond à une prétopologie particulière) mais plus de montrer l'ouverture et la souplesse que permet ce nouveau cadre théorique.

48 Là aussi, il est difficile d'aller plus loin dans l'interprétation puisqu'il s'agit d'un extrait de la base. La « corrélation » entre les caractéristiques des auteurs et leurs positions permettrait d'éclairer l'analyse d'un réseau plus important. L'intérêt de cet exemple pédagogique est de montrer qu'il est possible d'appliquer la décomposition, de type centre(s)/périphérie(s), aussi aux cas où la prétopologie est de type V.

réseau. Ainsi, la généralisation de la définition des composantes (fortement) connexes et la décomposition des contextes ainsi définis (qui sont autant de groupes de co-publiants) permettent de mettre en évidence la configuration du réseau d'auteurs, en repérant les auteurs périphériques (plus en marge) et des auteurs plus centraux (des « référents »).

Annexe 1 – Tableau des publications auxquelles Guthrie appartient

Référence	Auteur 1	Auteur 2	Auteur 3	Auteur 4	Auteur 5	Auteur 6	Auteur 7	Auteur 8
1	Guthrie	Kirsch						
2	Guthrie							
3	Guthrie	Van Meter	Hancock	Alao	Anderson	McCann		
4	Guthrie	Wigfield	Metsala	Cox				
5	Guthrie	Wigfield						
6	Guthrie	Wigfield	VonSecker					
7	Guthrie	Mosenthal						
8	Guthrie	Davis						
9	Guthrie	Alao						
10	Guthrie	BennettL	McGough					
11	Guthrie	Britten	Barker					
12	Guthrie	Anderson	Alao	Rinehart				
13	Guthrie	Schafer	Huang					
14	Guthrie	Seifert	Kirsch					
15	Guthrie	Schafer	Hutchinson					
16	Guthrie	Schafer	VonSecker	Alban				
17	Guthrie	Wigfield	Barbosa	Perencevich	Taboada	Davis	Scafiddi	Tonks
18	Guthrie	Tyler						
19	Guthrie	Cox						
20	Guthrie	Seifert						
21	Guthrie	Greaney						
22	Guthrie	BennettS	Weber					
23	Guthrie	Dreher						
24	Guthrie	McGough	BennettL	Rice				
25	Guthrie	Wigfield	Perencevich					
26	Guthrie	Cox	Knowles	Buehl	Mazzoni	Fasulo		
27	Guthrie	Schafer	Afflerbach	Almasi				
28	Alao	Guthrie						
29	Alvermann	Guthrie						
30	Azevedo	Guthrie	Seibert					
31	Baker	Guthrie	Dreher					
32	ByrneJP	Guthrie						
33	Cox	Guthrie						
34	Dreher	Guthrie						
35	Finucci	Guthrie	ChildsAL	Abbey	ChildsB			
36	Gaskins	Guthrie	Satlow	Ostertag	Six	ByrneJ	Connor	
37	Ng	Guthrie	Van Meter	McCann	Alao			
38	Sweet	Guthrie	Ng					
39	Wigfield	Guthrie						
40	Kirsch	Guthrie						
41	Baker	Dreher	Guthrie					
42	Pressley	Harris	Guthrie					

Annexe 2 – Un deuxième extrait de la base

Référence	Auteur 1	Auteur 2	Auteur 3
1	Scheerens	Creemers	
2	Scheerens	Bosker	Creemers
3	Stringfield	Herman	
4	Bosker	Creemers	Stringfield
5	Creemers	Reynolds	
6	Teddlie	Stringfield	
7	Teddlie	Stringfield	Reynolds
8	Bosker	Dekkers	
9	Creemers	deJong	
10	Reynolds	Creemers	Bird
11	Scheerens	Demeuse	
12	Jarousse	Leroy-Audoin	
13	Mingat	Chuard	
14	Chuard	Jarousse	Mingat
15	Jarousse	Leroy-Audouin	Mingat
16	Mingat	Bruns	
17	Mingat	Suchaut	
18	Duru-Bellat	Suchaut	
19	Mingat	Rakotomalala	Suchaut
20	Duru-Bellat	Kieffer	
21	Duru-Bellat	Meuret	
22	Straeten	Demeuse	Meuret
23	Demeuse	Baye	

Bibliographie

Barnes, John et Frank Harary, « Graph Theory in Network Analysis», *Social Networks*, nº 5, 1983, p. 235-244.

Belmandt, Z., *Manuel de prétopologie et ses applications*, Paris, Hermès, 1993.

Berge, Claude, *Graphes et hypergraphes*, troisième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1983.

Boissevain, Jeremy, «Network Analysis: A Reappraisal», *Current Anthropology*, vol. 20, nº 2, 1979, p. 392-394.

Borgatti, Steve et Martin Everett, «The Class of All Regular Equivalences: Algebraic Structure and Computation», *Social Networks*, nº 11, 1989, p. 65-88.

Borgatti, Steve, Martin Everett et Linton Freeman, *Ucinet IV, Version 1.0, Reference Manual*, Columbia, Analytic Technologie, 1992.

Burt, Ronald, *Structure. Version 4.2, Reference Manual*, Center for Social Sciences, New York, Columbia University, 1991.

Dalud-Vincent, Monique, « Comparaison des tables de mobilité sociale des enquêtes FQP de 1985 et de 2003 à l'aide des outils de la théorie des graphes : vers une continuité plus marquée entre les catégories socioprofessionnelles », *Mathématiques et sciences humaines,* nº 185, 2009, p. 37-67.

Dalud-Vincent, Monique, « Graphes et classification : l'exemple des tables de mobilité sociale », *Mathématiques et sciences humaines*, nº 147, 1999, p. 47-70.

Dalud-Vincent, Monique, *Modèle prétopologique pour une méthodologie d'analyse de réseaux : concepts et algorithmes,* thèse de doctorat, Université Lyon I, 1994.

Dalud-Vincent, Monique, « Modélisation prétopologique de la notion de réseau : un outil pour l'étude de la proximité en sociologie », dans Michel Bellet, Thierry Kirat et Christine Largeron (dir.), *Approches multiformes de la proximité*, Cachan, Hermès, coll. « Interdisciplinarité et nouveaux outils », 1998, p. 149-173.

Dalud-Vincent, Monique, « Réso comme outil de structuration des catégories socioprofessionnelles », *Bulletin de méthodologie sociologique*, nº 76, 2002, p. 5-25.

Dalud-Vincent, Monique, Marcel Brissaud et Michel Lamure, « Closed Sets and Closures in Pretopology », *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 50, nº 3, 2009, p. 391-402.

Dalud-Vincent, Monique, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Connectivities and Partitions in a Pretopological Space», *International Mathematical Forum*, vol. 6, nº 45, 2011, p. 2201-2215.

Dalud-Vincent, Monique, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Pretopology as an Extension of Graph Theory: The Case of Strong Connectivity», *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 5, nº 4, 2001, p. 455-472.

Dalud-Vincent, Monique, Marcel Brissaud et Michel Lamure, «Pretopology, Matroïdes and Hypergraphs», *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, nº 4, 2011, p. 363-375.

Dalud-Vincent, Monique, Michel Forsé et Jean-Paul Auray, «An Algorithm for Finding the Structure of Social Groups», *Social Networks,* nº 16, 1994, p. 137-162.

Dalud-Vincent, Monique et Michel Lamure, «Connectivities for a Pretopology and its Inverse», *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 86, nº 1, 2013, p. 43-54.

Dalud-Vincent, Monique et Romuald Normand, « Analyse textuelle et analyse de réseaux : exemple du traitement d'une base de données bibliographiques à l'aide des logiciels Alceste et Pajek », *Bulletin de méthodologie sociologique*, nº 109, 2011, p. 20-38.

Dalud-Vincent, Monique et Romuald Normand, « Entre mesure, science et politique : construction et analyse d'un réseau international de co-publications dans le domaine de l'éducation », *Nouvelles perspectives en sciences sociales*, vol. 6, n° 2, 2011, p. 197-232.

Degenne, Alain, « Un domaine d'interaction entre les mathématiques et les sciences sociales : les réseaux sociaux », *Mathématiques, informatique et sciences humaines*, nº 104, 1988, p. 5-18.

Degenne, Alain, « L'analyse des réseaux sociaux. Un survol à travers quelques jalons », *Bulletin de méthodologie sociologique*, nº 118, 2013, p. 22-43.

Degenne, Alain et Michel Forsé, *Les réseaux sociaux*, Paris, Armand Colin, 1994.

Doreian, Patrick, «Equivalence in a Social Network», *Journal of Mathematical Sociology*, nº 3, 1988, p. 243-282.

Eve, Michael, « Deux traditions d'analyse des réseaux sociaux», *Réseaux*, nº 115, 2002, p. 183-212.

Flament, Claude, *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Mouton–Gauthier-Villars, 1968.

Fournier, Jean-Claude, «Introduction à la notion de matroïde (géométrie combinatoire)», *Publications Mathématiques d'Orsay*, Université Paris Sud, 2° trimestre, 1979.

Gondran, Michel et Michel Minoux, *Graphes et algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979.

Gribaudi, Maurizio (dir), *Espaces, Temporalités, Stratification. Exercices sur les réseaux sociaux*, Paris, École des hautes études en sciences sociales (EHESS), 1998.

Kuratowski , Casimir, *Topologie,* Varsovie, 1952.

Lazega, Emmanuel, Réseaux sociaux et structures relationnelles, troisième édition, Paris, Pesses universitaires de France, coll. « Que sais-je? », 2014.

Mercklé, Pierre, *Sociologie des réseaux sociaux*, Paris, Repères, La Découverte, 2004.

Nooy, Wouter de, Andrej Mvar et Vladimir Batagelj, *Exploratory Social Network Analysis with Pajek*, Cambridge (MA), Cambridge University Press, 2005.

Normand, Romuald et Monique Dalud-Vincent, « Sciences de gouvernement de l'éducation et réseaux transnationaux d'experts : la fabrication d'une politique européenne », *Éducation et sociétés*, nº 29, 2012, p. 103-123.

Roy, Bernard, *Algèbre moderne et théorie des graphes orientés vers les sciences économiques et sociales*, tomes 1 et 2, Paris, Dunod, 1969.

Wellman, Barry et Stephen Berkowitz, *Social Structures: A Network Approach*, Cambridge (MA), Cambridge University Press, 1988.

White, Douglas et Karl Reitz, « Graph and Semigroup Homomorphisms on Networks of Relations », *Social Networks*, nº 5, 1983, p. 193-234.