Laval théologique et philosophique

Principales manifestations de l'infini en mathématiques

Louis-Émile Blanchet

Volume 23, numéro 1, 1967

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1020103ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1020103ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Laval théologique et philosophique, Université Laval

ISSN

0023-9054 (imprimé)
1703-8804 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Blanchet, L.-É. (1967). Principales manifestations de l'infini en mathématiques. *Laval théologique et philosophique*, *23*(1), 9–41. https://doi.org/10.7202/1020103ar

Principales manifestations de l'infini en mathématiques

L'infini est inévitable en mathématiques. Vouloir l'en bannir serait une entreprise vaine et d'avance vouée à l'échec ; car si elle devait réussir elle équivaudrait à la suppression des mathématiques elles-mêmes. Dans le gigantesque édifice que constituent les mathématiques contemporaines, la présence de l'infini n'est pas confinée à un secteur ou à l'autre, mais elle est partout répandue, à tel point qu'Hermann Weyl a pu faire cette déclaration : « Mathematics is the science of the infinite ».[1] Vraisemblablement il n'entendait pas, par là, définir les mathématiques, mais voulait plutôt souligner l'importance capitale du rôle qu'y joue l'infini. Une grave erreur à éviter, c'est celle de croire l'infini présent dans les seules mathématiques supérieures ou avancées ; car, en fait, même si sa présence y est plus discrète et effacée, c'est aux portes mêmes des mathématiques que l'infini est présent. Une autre erreur possible serait de croire que l'apparition de l'infini en mathématiques est de date récente. Si l'on doit reconnaître qu'il joue aujourd'hui un rôle illimité et prépondérant dans les mathématiques contemporaines, rôle qui n'a cessé de grandir au cours des siècles, il n'empêche que sa présence est déjà assez fortement accusée dans les mathématiques grecques pour y être aisément perceptible.[2]

Nous poursuivrons, dans ces pages, un double but : montrer tout d'abord, de façon aussi brève et simple que possible, mais quand même probante, quelle place immense tient l'infini dans les mathématiques tant anciennes que contemporaines ; en second lieu, faire voir le rôle grandissant que l'infini a été appelé à y jouer à mesure que celles-ci se développaient au cours des siècles, sans toutefois nous astreindre aux exigences d'une présentation à caractère proprement historique.

Nous envisagerons d'abord l'infini au niveau des mathématiques élémentaires, i. e. là où il n'est pas fait un usage systématique de la notion de limite ni des processus infinis. Ces considérations vaudront et pour les mathématiques anciennes et pour les mathématiques contemporaines. Ensuite, nous verrons le rôle qui a été dévolu à l'infini

1. *The Open World*, New-Haven, Yale Univ. Press, 1932.

2. Carl Friedrich von WEIZSACKER, *Le monde vu par la physique*, trad. de l'allemand par F. MOSSER, Paris, Flammarion, (c.1956), p.183. L'auteur a assurément de bonnes raisons pour écrire que la géométrie d'Euclide est une géométrie du fini. Mais il ne prétend pas par là que l'infini soit totalement absent des *Éléments* : il faudrait autrement supprimer ou ignorer toute la doctrine des parallèles et le livre X qui traite des incommensurables et où les processus infinis entrent en ligne de compte.

à partir de l'invention du calcul infinitésimal et, finalement, ce qu'est devenu l'infini avec l'arithmétique transfinie de Georg Cantor.

Rien ne paraît plus naturel que de demander quelle est la raison, s'il en existe une, de la présence et de l'importance de l'infini en mathématiques. Pour tous ceux qui reconnaissent, dans la quantité, le sujet propre, total ou au moins partiel, des mathématiques, la réponse est facile. Rien d'étonnant, pour eux, que l'étude systématique de la quantité conduise naturellement et inéluctablement à la considération de ces propriétés mutuellement exclusives que sont le fini et l'infini.[1] On sait toutefois que cette vue relative au sujet des mathématiques n'est pas celle de nombreux mathématiciens contemporains ; il serait probablement plus juste de dire que ce n'est pas l'opinion de la plupart d'entre eux. Pour tous les disciples de Russell et de Hilbert en tout cas, la quantité n'a rien à voir avec les mathématiques, ou, plus justement peut-être, n'a pas plus de titre à l'attention du mathématicien que n'importe quoi d'autre. Dans de telles conditions, comment expliquent-ils la place si large et l'attention si grande accordées à l'infini en mathématiques ? La réponse est tout simple : ils n'en fournissent aucune explication.

Mais qu'importe la cause de cet état de choses, ce qui, pour nous, est indispensable, c'est de rendre manifeste, d'une manière simple mais efficace, cette présence partout répandue de l'infini en mathématiques. À cette fin, occupons-nous d'abord du domaine des nombres.

I. LES NOMBRES ET L'INFINI

La signification du terme « nombre » s'est fort élargie au cours des siècles. Pour Aristote — comme pour Euclide du reste — ce terme désignait une multitude finie d'unités, une multitude mesurée par l'unité.[2] Plus concrètement, on entendait par « nombres » ce qu'on entend aujourd'hui par « nombres naturels » moins l'unité, i. e., la suite bien connue

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots n, \ldots$$

Mais, graduellement, le mot a été amené à désigner une multitude d'entités mathématiques si vaste et si variée qu'il a perdu la précision due à sa limitation d'autrefois. Si bien qu'on se voit, aujourd'hui, pour ainsi dire forcé de partager cet immense domaine en catégories plus

1. S. THOMAS, *In I De Coelo*, lect. 6,n.62 : « Infinitum autem, secundum Philosophum in *I Phys.*, pertinet ad quantitatem ; ita quod id quod quantitate caret, neque finitum neque infinitum est. »

2. Cf. Gottlob FREGE, *The Foundations of Arithmetic*, 2e éd., trad. J. L. Austin, N. Y., Harper Torchbooks, 1960, p.25. Frege distingue un sens strict et restreint de même qu'un sens large du terme « nombre ». Le sens strict est restreint aux « nombres naturels » qui, pour lui, incluent l'unité.

restreintes et auxquelles correspondent des dénominations distinctives appropriées. Pour signifier l'unité et les nombres au sens ancien, on utilisera l'expression de «nombres naturels» ou d'entiers positifs. Par nombres «entiers», on entend l'ensemble des nombres entiers positifs, nul et négatifs ; la classe des «nombres rationnels» ou «nombres fractionnaires» comprend tous les rapports ou quotients de deux nombres entiers, toutes les expressions de la forme m/n où n, le dénominateur, n'est pas nul. À cela s'ajoutent les «nombres irrationnels» — les quantités irrationnelles d'autrefois — qui englobent tous les rapports quantitatifs qui ne peuvent s'exprimer sous la forme de deux nombres entiers. Réunis aux nombres rationnels, ces derniers composent l'ensemble des «nombres réels». Un autre ensemble, dont la création a provoqué de turbulents remous et de virulentes controverses parmi les mathématiciens, c'est celui des «nombres complexes». Ces nombres doivent leur appellation au fait que leur représentation donne naissance à une expression composée de deux parties : $a+bi$. La première partie «a» s'appelle partie réelle ; l'autre, «b», coefficient de «i», s'appelle partie imaginaire. Dans cette expression ou formule, «a» et «b» représentent des nombres réels, «i» symbolise $\sqrt{-i}$. Ces nombres complexes sont les premiers et les plus simples de toute une suite : quaternions, biquaternions, sedénions, dont l'expression symbolique respective comprend quatre, huit et seize termes. Ce sont là autant de catégories de «nombres hypercomplexes». Il nous suffira cependant de ne retenir ici que les premiers ensembles, y compris celui des nombres réels ; quant aux autres, s'il était nécessaire de les mentionner pour établir la signification très élargie du terme «nombre», leur étude, en regard de l'infini, n'apporte rien que nous n'ayons déjà de par l'analyse des ensembles antérieurs.

Parmi tous ces ensembles, celui des nombres naturels est le plus familier, le plus élémentaire, le plus fondamental de tous. Il est à la base de tous les autres, il est leur fondement ; tous s'y réduisent et s'y ramènent, tous se définissent, de proche en proche, à partir et en fonction de cet ensemble initial. Comme l'édifice mathématique tout entier repose sur les ensembles numériques mentionnés et que, d'autre part, tous les ensembles numériques dépendent des nombres naturels, on peut dire que l'univers mathématique tout entier se résorbe, en dernière instance, dans cet ensemble initial. On pourrait croire que l'infini n'a rien à voir avec un ensemble si simple et si primitif. Il n'en est pourtant rien. Les nombres naturels forment un ensemble ordonné[1] selon des valeurs croissantes à partir d'un premier terme, l'unité. Autrement dit, ils forment une suite croissante. Toutefois cette suite n'est pas dense : entre deux nombres naturels quelconques, il peut

1. Dans la terminologie contemporaine des mathématiques, on dirait que les nombres naturels forment un ensemble non seulement ordonné, mais encore *bien-ordonné*, parce qu'il possède un tout premier membre. Cf. G. BIRKHOFF et S. MACLANE, *A Survey of Modern Algebra*, New-York, Macmillan, 1946, p.9.

exister ou non des intermédiaires ; s'il n'en existe pas, on a affaire à des voisins. Chaque élément de cette suite est constitué par une multitude finie d'unités. Mais si elle possède un premier terme, elle n'a pas de dernier terme : quel que soit le nombre naturel qu'on nous désigne, si grand soit-il, on peut toujours en former un plus grand en ajoutant une unité à celui qui a été proposé, et cela sans fin. La suite des nombres naturels est illimitée, infinie dans le sens de la croissance des nombres qui la composent bien qu'aucun de ses éléments constitutifs ne soit lui-même infini. L'infini est associé à la suite des nombres naturels, non pas aux membres de cette suite. Mais il reste que l'infini est associé et présent à ce qui constitue le point de départ même des mathématiques pour autant qu'on ne peut le décrire correctement sans faire mention de l'infini.

L'ensemble des nombres entiers[1] — positifs, nul et négatifs — fait logiquement suite[2] aux nombres naturels :

$$\ldots -n, \ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots +n, \ldots$$

Ce nouvel ensemble, à la différence du premier, n'a ni commencement ni fin, ni premier ni dernier terme, il est illimité et à gauche et à droite, il est infini et dans le sens de la décroissance et dans celui de la croissance. Pour le reste, ses caractéristiques sont celles de la suite des nombres naturels. Et, pour notre propos, il n'y a rien d'autre à ajouter.

L'ensemble des nombres rationnels, successeur immédiat de celui des nombres entiers, suscite un nouvel intérêt pour la question de l'infini. Si, à l'image de l'ensemble des nombres entiers, il est illimité dans les deux sens, sans commencement ni fin, il possède en revanche une caractéristique que ne possédaient pas ses prédécesseurs. Dans l'ensemble des nombres rationnels en effet il n'y a pas de voisins. Deux nombres entiers peuvent être des voisins et se succéder immédiatement : entre 5 et 6 par exemple, il n'existe aucun autre nombre naturel. Mais quels que soient les deux nombres rationnels qui soient suggérés, quelque minime que soit leur différence, on peut toujours intercaler une nouvelle fraction entre eux. Supposons données les deux fractions m/n et r/s. Supposons en outre que la première soit très rapprochée de la seconde, mais inférieure à elle : $m/n < r/s$. Rappelons d'autre part que l'ordre entre les fractions est défini par les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} a/b < c/d & \text{pourvu que} & a.d < b.c \\ a/b = c/d & \ldots\ldots\ldots & a.d = b.c \\ a/b > c/d & \ldots\ldots\ldots & a.d > b.c \end{array} \qquad \text{(I)}$$

1. On les désigne aussi, parfois, par l'expression de « nombres qualifiés » et ce n'est pas sans raison, car ce sont plus que des nombres tout court, ils désignent plus qu'une pure valeur absolue : à leur valeur absolue s'ajoute en effet un sens ou une direction : à droite ou à gauche, au-dessus ou au-dessous d'un point de repère fixe.

2. Historiquement les fractions sont apparues immédiatement après les nombres naturels.

Il nous incombe maintenant de construire une fraction qui soit à la fois supérieure à m/n et inférieure à r/s. Pareille construction peut être réalisée de plus d'une façon,[1] mais la plus simple nous conviendra. Elle consiste à additionner les numérateurs des fractions proposées pour former le numérateur de la nouvelle fraction, à additionner également les dénominateurs pour obtenir le dénominateur de la fraction cherchée. On obtient ainsi la fraction :

$$m+r \,/\, n+s$$

et il reste à montrer que

$$m/n < \frac{m+r}{n+s} < r/s$$

La première inégalité est facile à vérifier. En effet, en vertu des définitions (I) précédentes et de quelques principes fondamentaux de calcul, on a

$$\begin{aligned} m.s &< n.r \\ m.n+m.s &< m.n+n.r \\ m.(n+s) &< n.(m+r) \\ \frac{m}{n} &< \frac{m+r}{n+s} \end{aligned} \tag{II}$$

On voit par là qu'à partir de l'inégalité des fractions initiales, on peut construire rigoureusement une nouvelle fraction qui dépasse en valeur la première donnée. Il en va exactement de même pour la seconde inégalité, sauf qu'il faudra ajouter aux deux membres de l'inégalité primitive, r.s et non plus m.n comme précédemment.

$$\begin{aligned} m.s &< n.r \\ m.s+r.s &< n.r+r.s \\ (m+r).s &< r.(n+s) \\ \frac{s}{r} &< \frac{n+s.}{m+r} \end{aligned} \tag{III}$$

Réunissant (II) et (III), on obtient :

$$m/n < \frac{m+r}{n+s} < r/s$$

La fraction construite répond donc bien à notre attente : elle est véritablement située entre les deux fractions quelconques proposées. Cela veut dire, en d'autres termes, que les deux fractions initiales ne se suivent pas, qu'elles ne sont pas voisines l'une de l'autre, car elles sont séparées par une autre fraction au moins. Qu'il en existe au moins une, c'est tout ce qu'on peut dire si l'on s'en tient strictement à la construction précédente. Mais il faut dire davantage, car s'il en existe une, il en existe en fait une infinité. Rien n'est plus aisé que de

1. Cf. Louis COUTURAT, *De l'infini mathématique*, Paris, Félix Alcan, 1896, pp.55-58.

s'en rendre compte. En effet m/n et r/s sont des fractions quelconques ; aucune d'elles n'est privilégiée. L'une d'elles peut être remplacée par une autre. En particulier, on peut substituer m+r/ n+s à r/s et reprendre le même processus que plus haut. On obtiendra alors, au terme de cette seconde étape, le résultat suivant :

$$\frac{m}{n} < \frac{2m+r}{2n+s} < \frac{m+r}{n+s} < \frac{r}{s}$$

La répétition, de proche en proche, de ce procédé constructif donnerait la suite :

$$\frac{m}{n} < \dots < \frac{km+r}{kn+s} < \dots < \frac{2m+r}{2n+s} < \frac{m+r}{n+s} < \frac{r}{s}$$

où k peut prendre toutes les valeurs naturelles possibles. Les fractions ainsi obtenues successivement décroissent sans cesse et se rapprochent constamment de m/n. Mais ce qu'il faut bien noter, c'est que jamais ce processus constructif ne nous permettra d'atteindre m/n. Cela veut dire que non seulement il n'y a pas de fractions voisines, mais encore qu'entre deux fractions quelconques, de valeurs aussi rapprochées qu'on veut, il en existe une infinité d'autres qui les séparent. C'est là une propriété des nombres rationnels que les mathématiciens appellent « densité ». Elle distingue nettement l'ensemble des nombres rationnels ou fractionnaires des deux ensembles précédents qui sont infiniment moins riches.

L'infini se manifeste encore d'une autre façon dans le domaine des nombres rationnels. Mais, cette fois, il s'agit beaucoup plus du symbolisme propre à les représenter que des nombres eux-mêmes ou de leur ensemble. Il existe deux modes de représentation des nombres rationnels : on les écrit soit sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers soit sous la forme décimale. Le premier mode donne toujours lieu à une expression finie : il n'y a alors toujours que deux nombres entiers en présence dans l'expression symbolique qui, par conséquent, est nécessairement finie. La situation est différente si l'on adopte[1] la représentation décimale : elle peut alors donner lieu à une expression illimitée. Pour fixer les idées, énumérons quelques exemples, choisis parmi les plus simples :

$$\begin{array}{lll}
1/2 = 0.5 & & \\
1/4 = 0.25 & & \\
1/3 = 0.33333333333333\dots & & = 0.\overline{3} \\
2/3 = 0.66666666666666\dots & & = 0.\overline{6} \\
1/6 = 0.16666666666666\dots & & = 0.1\overline{6} \\
1/7 = 0.142857142857142857\dots & & = 0.\overline{142857} \\
1/12 = 0.083333333333333333\dots & & = 0.08\overline{3}
\end{array}$$

1. Il faut noter que chaque fraction est susceptible de ce double mode de représentation et, en outre, qu'il est toujours possible, dans chaque cas, de passer d'une forme de représentation à l'autre.

Chaque fois que le dénominateur de la fraction ordinaire renferme un facteur relativement premier par rapport à la base dans laquelle les nombres sont écrits, la fraction, écrite sous forme décimale, présentera une expression infinie. Il faut toutefois remarquer que cette expression infinie offre toujours un segment récurrent, précédé d'une partie non-récurrente si le dénominateur renferme un facteur de la base. Ce mode de représentation au moyen d'expressions infinies, interminables, serait, si c'était le seul, une sérieuse source d'ennuis comme c'est le cas chaque fois que l'infini surgit ; mais, heureusement, il est toujours possible, ici, de recourir à l'autre forme de représentation. Grâce à ce recours possible, l'infini ne fait naître aucun problème épineux dans l'usage des nombres rationnels.

La situation est tout autre lorsqu'on aborde l'ensemble des nombres irrationnels : leur connaissance et la détermination de leur valeur nous met aux prises avec des difficultés insurmontables ; et cela, précisement parce qu'on ne peut les expliquer sans recourir à l'infini. Or l'infini est toujours une source de malaise pour l'intelligence humaine à moins qu'elle ne réussisse, de façon ingénieuse à le ramener à du fini. L'histoire nous apprend que la découverte par les Pythagoriciens de la première irrationnelle, à savoir $\sqrt{2}$, ne fut rien de moins qu'une grande tragédie : ce fut, pour eux, la ruine de leur théorie des proportions, puisqu'elle était valable non pas pour toute grandeur, mais uniquement pour les nombres rationnels ; ce fut également, à cause de cela, non seulement la ruine de toutes leurs mathématiques, mais encore de toute leur doctrine philosophique, car celle-ci était essentiellement basée sur les mathématiques.[1] Au cours des siècles, des efforts multiples et variés furent tentés pour expliquer et justifier les nombres irrationnels : d'abord dans l'antiquité, par des successeurs des Pythagoriciens comme Eudoxe et Euclide, ensuite, dans les temps modernes, par Dedekind, Cantor et autres. S'ils ont connu une large part de succès, ces louables efforts n'ont pourtant jamais réussi à dissiper tout malaise : l'esprit humain demeure en effet toujours gêné et mal à l'aise en face des quantités irrationnelles. La raison, nous allons le voir, est assez simple.

L'intelligence humaine progresse en allant du connu à l'inconnu, du plus connu vers le moins connu ; elle définit et explique à partir de données antérieures ou, au moins, mieux connues ; elle prouve et démontre à partir de propositions antérieures et mieux connues. Ces principes valent, en particulier, quand il s'agit des nombres. On définit les nombres entiers en fonction des nombres naturels qui sont les tout premiers ; on définit les nombres rationnels en fonction des

1. Cf. T. L. Heath, *Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, The Clarendon Press, 1921, pp.154-158 ; *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford, The Clarendon Press, 1931, p.105 ; *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol., 2e éd., New York, Dover, 1956, t.3, Introduction, p.1.

nombres entiers. Dans ces deux cas, on peut le faire d'après un processus fini et limité. Mais il n'en va plus du tout ainsi lorsqu'il s'agit de définir les nombres irrationnels : on ne peut absolument pas y arriver sans que l'infini n'intervienne, intrinsèquement et essentiellement, dans la définition elle-même. Et cela, quelle que soit la définition qu'on propose. Dedekind, pour sa part, a proposé un type de définition basée sur des coupures introduites dans le champ des nombres rationnels ;[1] mais le partage qu'effectue une coupure engendre nécessairement deux classes infinies telles que la classe inférieure ne renferme pas de maximum et la classe supérieure, pas de minimum ; ces deux classes convergent toutes les deux vers une même valeur et cette valeur sera, par définition, un nombre irrationnel. Mais la valeur ainsi définie n'est jamais saisie que dans un processus, dans un mouvement sans fin, jamais dans un arrêt et un repos. Quant à Cantor, c'est aux suites qu'il a eu recours pour définir les nombres irrationnels : toute suite convergente formée de nombres rationnels et dont la limite n'est pas un nombre rationnel définira un nombre irrationnel.[2] Ici encore, on voit sans peine que l'infini entre dans la définition même du nombre irrationnel, ce qui, inévitablement, constitue une source d'obscurité. On peut concevoir une troisième façon d'introduire les nombres irrationnels. Nous avons vu plus haut qu'aux nombres rationnels correspondent des expressions décimales finies ou infinies ; lorsqu'elles sont infinies, elles comportent toujours un segment indéfiniment récurrent. On pourrait y trouver le point de départ pour définir les nombres irrationnels : ils correspondraient aux valeurs représentées par les expressions décimales libres de tout segment sans cesse récurrent. Mais là encore, tout comme dans les définitions précédentes, on retrouve l'infini avec les mêmes inconvénients. Le recours à l'infini comme tel apparaît donc comme inévitable lorsqu'il s'agit de définir les nombres irrationnels, On voit par là que l'infini affecte, sans qu'il soit possible d'échapper à cette nécessité, non plus seulement la classe des nombres irrationnels, mais chaque nombre irrationnel pris individuellement et dans sa définition même, ce qui distingue ces nouveaux nombres des nombres précédents, rationnels, entiers et naturels, où chaque nombre individuel n'était pas touché.

II. LES GRANDEURS ET L'INFINI

La présence de l'infini, toujours au niveau élémentaire, apparaît non seulement dans les nombres, mais également dans la grandeur ou

1. R. DEDEKIND, *Essays on the Theory of Numbers*, trad. Beman, Chicago, Open Court Publ. Co., 1924. Voir aussi : G. H. HARDY, 9[e] éd., *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge, The University Press, 1947, pp.28-30 ; Konrad KNOPP, *Theory and Application of Infinite Series*, 2[e] éd., trad. R. C. Young, Londres, Blackie & Son, 1928, pp.22-32.

2. O. PERRON, *Irrationalzahlen*, 2[e] éd., New York, Chelsea Publ. Co., 1948, pp.55-60.

quantité continue et, par là, en géométrie. Par opposition aux Platoniciens, Aristote et, après lui, saint Thomas, soutenaient qu'aucun continu n'est fait d'indivisibles comme de ses parties constitutives : les solides ne sont pas faits de surfaces, les surfaces de lignes, les lignes de points. Tous ces cas étant semblables, nous pouvons sans le moindre inconvénient, *mutatis mutandis*, ne retenir que le cas le plus simple : celui de la ligne et du point. Si le point n'est pas une partie constitutive de la ligne, il ne lui est pourtant pas étranger.[1] Il est même quelque chose de la ligne : il lui appartient à titre de terme, d'extrémité, à titre de division ou de jonction pour autant que la division d'une ligne se fait en un point et que la jonction capable d'engendrer la continuité de ses parties est réalisée grâce au point. Pour les Anciens, toute ligne — plus généralement, tout continu — est divisible à l'infini. En effet, la division d'une ligne n'engendre pas autre chose que de nouvelles lignes qui en étaient, avant la division, les parties constitutives. Or ces parties sont toutes de même nature entre elles puisque ce sont des lignes ; elles sont, en outre, de même nature que la ligne originelle dont elles étaient, avant la division, les parties constitutives. Ce qui vaut pour la ligne primitive et la première division, vaut, dans une seconde étape, pour les lignes obtenues par une nouvelle division, lesquelles engendreront à leur tour, grâce à la division, de nouvelles lignes. Le processus peut se poursuivre sans fin, car, si l'œil ou même l'imagination sont déroutés, l'intelligence ne peut trouver aucune raison qui puisse lui faire mettre en doute la possibilité infinie d'un pareil processus. Ce processus n'aboutira jamais à des lignes insécables ou à des indivisibles ; il n'engendre et ne peut jamais engendrer que des lignes qui, de par leur nature même, sont des entités divisibles.

Si, pour Aristote et ceux qui partagent ses vues, la ligne n'est pas faite de points, il n'empêche toutefois qu'il est possible de désigner, dans une ligne quelconque, autant de points qu'on veut, voire une infinité. Cela, du reste, est non seulement conforme à ce qui précède, mais en est même une conséquence. En effet, si, d'une part, une ligne quelconque est infiniment divisible et si, d'autre part, chaque division se fait en un point, il s'ensuit nécessairement qu'on peut marquer une infinité de points dans une ligne.

Les mathématiciens contemporains, même s'ils acceptent l'infinie divisibilité de la ligne, n'en conçoivent pas moins autrement sa composition. Pour eux, la ligne se compose de points comme de ses parties propres et intégrantes. Et il va de soi qu'il faudra une infinité de ces points pour former une ligne quelconque. Il ne s'agit pas pour nous de peser les mérites ou les démérites de cette position. Tout ce qui nous intéresse pour le moment, c'est de constater que, par delà les

1. « Punctum igitur quamvis nulla pars sit lineae, tamen est aliquid lineae, quia est terminus lineae, et copulans partes ejus ... ». S. ALBERTUS, *Opera omnia*, Paris, Vivès, 1890, t.1, lib.2, *De Praedicamentis*, tr.3, c.3.

opinions divergentes sur la nature de la ligne, un fait reste acquis : l'infini surgit à propos de la grandeur qui se situe à la base même de la géométrie.

Il faut cependant dire plus. Il paraît exact de soutenir que la géométrie des Grecs était bâtie sur le fini. On sait par exemple qu'Aristote, quand il définit la ligne, pense à une ligne finie : c'est pour lui une longueur finie[1] ou encore une ligne terminée par des points. Dans ses *Éléments*, Euclide fera de même ; il posera deux notifications relatives à la droite : dans la première, il décrit la ligne comme une longueur sans largeur, ajoutant, dans la seconde, que les extrémités d'une ligne sont des points.[2] Le point de départ est radicalement différent pour le géomètre moderne ; il pose, au point de départ, la ligne et la surface comme des entités illimitées, infinies.[3] Il parlera d'un segment de droite ou de ligne s'il veut signifier une droite ou une ligne finie.

Mais si Euclide paraît avoir voulu conférer un caractère fini à la géométrie, s'il semble avoir voulu éviter autant que possible l'infini en géométrie, on a vite fait de constater qu'il a dû très tôt renoncer à son ambition.[4] Que signifie en effet le second postulat des *Éléments* sinon la possibilité de prolonger sans fin une droite ? Ce n'est sans doute pas là poser une droite qui serait infinie en acte, mais c'est poser une droite infinie en puissance.[5] Mais c'est surtout l'épineuse question des parallèles qui soulève le problème de l'infini d'une façon peut-être voilée, mais inévitable.

Les *Éléments* d'Euclide débutent par une longue suite de définitions, une série de cinq « demandes » ou postulats et, finalement, quelques notions communes ou axiomes. La toute dernière définition est celle des parallèles et se lit comme suit :

> Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Quant au célèbre postulat d'Euclide qui devait jouer un rôle si profond et si singulier dans l'histoire de la géométrie, il s'énonce comme suit :

> Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à

1. ARISTOTE, *Métaph.*, V, c.13, 1020 *a* 10.

2. EUCLIDE, *Éléments*, I, déf. 2 et 3 ; cf. S. THOMAS, *Ia*, q.85, a.8, ad 2.

3. Il faudrait peut-être préciser davantage et dire que cela vaut pour la géométrie euclidienne, non pour la géométrie projective où, par d'habiles conventions que nous signalerons plus loin, on n'a plus à parler d'infini, où on s'interdit l'usage de ce mot.

4. Cf. Carl Friedrich von WEIZSACKER, *Le monde vu par la physique*, trad. F. MOSSER, Paris, Flammarion, 1956, p.183.

5. Cf. HEATH, *The Thirteen Books* ..., t.1, p.234. Aristote estime que le géomètre ne se sert pas de la droite infinie ; il lui suffit d'une droite aussi longue qu'il le désire.

l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.[1]

Ces deux énoncés sont à la base de la théorie euclidienne des parallèles dont la *Proposition 27* du premier livre marque le début. Toutefois Euclide ne fera usage de son fameux postulat qu'à la *Proposition 29.* Beaucoup de mathématiciens soutiennent qu'Euclide aurait reculé autant que possible le moment où il devrait utiliser ce postulat. On croit déceler, dans ce retard, un signe indiquant l'hésitation d'Euclide devant le postulat des parallèles et, indirectement, devant l'infini. Quoi qu'il en soit de cette opinion, il est incontestable que l'on ne peut bannir totalement l'infini du domaine géométrique : le génie d'Euclide, quelles que fussent ses préférences ou ses hésitations, était plus que d'autres en mesure de le reconnaître. Autre point à souligner : pour Euclide et, en général, pour la géométrie euclidienne, l'infini est nettement distingué des entités finies. L'infini est du ressort de la géométrie euclidienne un peu comme l'infini est du ressort de l'arithmétique traitant des nombres naturels ou entiers : ce ne sont pas les nombres eux-mêmes qui sont infinis, mais leur suite. En d'autres termes, Euclide ne considère pas des entités qui seraient en elles-mêmes infinies ou qui seraient situées à l'infini ; ce qu'il considère, ce sont des éléments finis mais qui, dans certains cas, évoquent ou font intervenir l'infini.

La géométrie projective, au contraire, considère directement des éléments ou entités infinis, comme le point à l'infini, la droite à l'infini, le plan à l'infini. Cependant il faut ajouter que, grâce à la magie de quelques conventions linguistiques et à un jeu de représentation symbolique, elle a réussi en quelque façon à ramener ces éléments impropres, idéaux, à des éléments ordinaires, c'est-à-dire à ne plus distinguer entre point ordinaire et point à l'infini, entre droite ordinaire et droite à l'infini, entre plan ordinaire et plan à l'infini. Tout cela n'avait pas directement pour but d'écarter habilement et illusoirement l'infini du vocabulaire mathématique, mais plutôt d'introduire une simplification aussi légitime que désirable ; et ce, en supprimant certains cas exceptionnels qui obligent à restreindre la portée d'énoncés qui, autrement, pourraient être formulés universellement et en rendant symétriques certains couples d'énoncés.[2]

On connaît l'énoncé : deux points déterminent une droite. On souhaiterait que la substitution réciproque des mots « point » et « ligne » nous donnât un énoncé qui fût, lui aussi, universellement valide à l'instar du premier. On voudrait pouvoir dire : deux droites déter-

1. Cette traduction et la précédente proviennent de la vieille édition des œuvres d'Euclide préparée par F. Peyrard : *Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français*, 3 vol., Paris, M. Patris, 1814.

2. Cf. G. Verriest, *Les nombres et les espaces*, Paris, Armand Colin, 1951, pp.42-51 ; Lucien Godeaux, *Les géométries*, Paris, Armand Colin, 1947, pp.73-77.

minent un point dans un même plan. Mais on pense tout de suite à l'exception constituée par les droites parallèles qui ne se coupent pas et ne déterminent donc aucun point qui leur soit commun. S'il était possible de faire disparaître ce cas exceptionnel, nous aurions deux énoncés parfaitement symétriques ; le changement des termes « point » et « droite » donnerait, en outre, deux énoncés universellement valables. Par là serait obtenue ce que les mathématiciens appellent la « dualité » dans le plan ; ils y voient un immense avantage. Si en effet la substitution réciproque engendre automatiquement un énoncé valable, le travail devient singulièrement réduit, car il suffit alors de prouver un des deux énoncés pour obtenir immédiatement, grâce à la loi de dualité, un second énoncé tout aussi valable, sans autre effort que celui d'interchanger quelque nots.

Mais comment réaliser cet ambitieux projet ? Comment élaborer le plan projectif ? On a dû franchir les étapes suivantes. Deux droites d'un même plan ou bien se coupent ou bien ne se coupent pas. Se couper, pour deux droites, c'est posséder un point commun ; ne pas se couper, c'est n'avoir aucun point commun ; et c'est là le cas des parallèles, cas exceptionnel qui vient limiter la généralité de l'énoncé : deux droites d'un même plan ont un point commun ou déterminent un point. Les parallèles ont pourtant une propriété en commun, celle de posséder une même direction. Cette direction est en quelque sorte déterminée par un *point à l'infini* vers lequel elles tendent et où elles sembleraient devoir se rencontrer. Si l'on identifie *point à l'infini* et *direction*, rien ne nous empêche de dire, sans restriction aucune, que deux droites déterminent un point. Ce point sera un point ordinaire s'il s'agit de non-parallèles, un point extraordinaire, impropre, idéal, s'il s'agit de parallèles. Mais le terme « parallèle » est inadmissible en géométrie projective parce qu'il implique mesure. La géométrie projective ne distinguera donc plus entre point ordinaire et point idéal, point propre et point impropre ou à l'infini. De cette façon, il ne pourra plus être question de distinguer entre droites concourantes et droites parallèles. Telle est la droite en géométrie projective.[1] On pourrait étendre ces considérations au plan et à l'espace, mais notre propos ne l'exige pas.

Ces remarques sur la géométrie projective pourraient nous laisser croire que l'infini y est frappé d'interdit. En réalité, c'est plutôt l'inverse qui se vérifie. La géométrie projective en effet n'entend pas limiter son étude aux entités ordinaires, i.e., situées à distance finie, elle entend au contraire l'étendre même aux éléments impropres i.e., situés à l'infini. Mais, pour ce faire, elle doit réduire ces éléments

1. Cf. VERRIEST, *Les nombres et ...*, p.46 ; R. COURANT et H. ROBINS, *What is mathematics ?*, London, Oxford Univ. Press, (c.1941), pp.180-83 ; Nathan A. COURT, *Mathematics in Fun and in Earnest*, New York, The New American Library of World Literature, 1961, p.94 ; H. S. M. COXETER, *The Real Projective Plane*, New York, McGraw-Hill, 1949, pp.4, 5 et 98.

impropres à des éléments ordinaires et les considérer comme non-exceptionnels. Cette réduction à du fini est d'ailleurs la seule façon dont le mathématicien, en général, puisse s'occuper de l'infini comme nous le verrons mieux un peu plus loin.

III. LES PROCESSUS ILLIMITÉS ET L'INFINI

Le XVII[e] siècle, qui imprima aux mathématiques un si vigoureux élan, devait inaugurer une nouvelle ère pour l'infini en ce domaine. Le rôle que l'infini devait être appelé à y jouer était un rôle nouveau aussi bien par son importance que par sa nature. Jusque-là, conformément à l'esprit grec, ses relations avec la mathématique, avaient été un peu celles d'un proche voisin, un peu embarrassant, mais étranger à la famille. On ne peut éviter la présence et la rencontre occasionnelle du voisin étranger, mais il ne fait pas partie de la famille ; on se passerait volontiers de sa présence, on pourrait même aller jusqu'à éviter de le rencontrer sans manquer aux convenances. Telle était, pour ainsi dire, l'attitude qu'on avait eue jusque-là vis-à-vis de l'infini. Il n'était pas un membre de la famille mathématique, admis dans son intimité ; on consentait à le rencontrer, à l'envisager lorsque sa présence devenait inévitable, mais on faisait tout pour s'en passer.

La découverte du calcul infinitésimal, attribuée à Newton et à Leibniz, devait modifier profondément cette attitude. Cette modification, toutefois, ne se fit pas du soir au matin, ni sans heurts, sans controverses, et sans résistances. Avec le calcul différentiel et intégral, avec le calcul des séries infinies, l'infini perdait en effet son statut d'étranger : il était invité à prendre place au sein même de la famille mathématique. Non pas peut-être à titre de membre de plein droit, mais au moins comme serviteur et instrument indispensable. Et, à ce titre même, il était appelé à jouer en mathématique un rôle de toute première importance, à y occuper une place incommensurable.

> Le rôle considérable que joua immédiatement ce calcul dans toutes les parties des mathématiques le fit bientôt regarder comme la base fondamentale de l'instrument par excellence de la Mathématique pure, ... D'ailleurs les difficultés philosophiques auxquelles semblait donner lieu la notion d'infini, le mystère qui l'enveloppait en apparence, incitaient naturellement les analystes à considérer le nouveau calcul comme radicalement différent de l'ancien. On crut donc de bonne foi que l'on était entré dans une ère nouvelle et que les découvertes de Newton et de Leibniz avaient révolutionné la science mathématique.[1]

Il n'entre pas dans les cadres de cette étude de retracer l'histoire complète des mathématiques du XVII[e] siècle ni même celle de l'analyse

1. Pierre BOUTROUX, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, nouv. éd., Paris, P. U. F., 1955, p.111.

infinitésimale.[1] Nous nous contenterons ici de souligner le changement de climat qui se fit jour dans la façon d'envisager l'infini en mathématiques et de dégager les bases de l'analyse infinitésimale et les éléments communs au calcul infinitésimal, au calcul intégral et au calcul sérial. Une fois bien mise en relief la structure commune de ces calculs, nous pourrons faire la comparaison entre la situation ancienne et la situation nouvelle créée par les innovateurs du XVII^e siècle.

Dans les calculs différentiel, intégral et sérial, il existe un élément commun : dans les trois cas en effet, on trouve un processus infini, une opération toujours identique en nature, mais indéfiniment répétée de proche en proche selon une loi régulatrice. Dans le calcul différentiel, cette itération peut être assimilée à un processus de division s'effectuant sur une quantité qui décroît sans cesse et s'approche de zéro ; dans le calcul intégral, cette itération prend la forme d'une addition de parties, ce qui vaut également pour les séries.

Pour les besoins de notre étude, il n'est aucunement nécessaire que nous examinions tous et chacun des cas de processus infinis. Nous pouvons au contraire, et sans le moindre inconvénient, n'en retenir qu'un seul pour illustrer une situation qui est commune à tous. Et celui que nous retiendrons, ce sera celui des séries parce qu'il apparaît comme le plus facile.

La série se présente comme une entité mathématique complexe, formée par l'addition successive de termes où chacun s'obtient à partir du précédent d'une façon uniforme et d'après une loi bien déterminée. Une série quelconque peut se représenter symboliquement de la façon suivante :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Une série apparaît donc comme une sommation indéfinie, i.e., un processus d'addition où l'on peut toujours ajouter un nouveau terme, où, en d'autres mots, il n'y a pas de dernier terme. Personne doué de saine raison ne songerait à entreprendre une addition de ce genre avec l'espoir qu'il pourrait la terminer un jour ; il est clair que pareille entreprise est d'avance vouée à l'échec. Comment, dans ces conditions, peut-on encore prétendre qu'une telle expression peut avoir — dans certains cas — une somme que S pourrait désigner ? On devra comprendre que le terme « somme » n'a pas alors le sens usuel qu'on lui prête d'ordinaire, i.e., qu'il ne désigne pas alors le résultat de cette opération primitive qu'on connaît bien et qui comporte des étapes plus ou moins nombreuses, mais en nombre fini. Il n'en va pas de

1. On peut, sur ce sujet, consulter maints ouvrages d'histoire des mathématiques ; entre autres, les suivants : J.-F. MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, 4 vol., Paris, Albert Blanchard, 1960, t.3 : Léon BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 3^e éd., Paris, P. U. F., 1947 ; BOUTROUX, *L'Idéal scientifique ... ; Histoire générale des sciences*, 4 vol., Paris, P. U. F., t.2, La science moderne.

même dans le cas des séries infinies : on trouve bien là une analogie avec le cas fini pour autant que, dans les deux cas, il s'agit d'opérations d'addition, mais là s'arrête la ressemblance. La somme est le résultat d'une suite d'opérations possibles parce qu'elles sont en nombre limité ; lorsque le nombre des opérations devient infini, le processus devient impossible et il ne peut être question de parler de résultat, de somme. Le terme «somme», s'il est moins approprié dans un tel contexte, demeure toutefois d'un usage courant : il ne désigne alors rien d'autre que la limite vers laquelle une suite infinie de sommes partielles[1] peut tendre. Conséquemment, plutôt que de somme, il vaudrait mieux parler de valeur-limite ou, plus simplement, de limite vers laquelle tend la série.[2] Calculer la somme d'une série — lorsque cette somme peut être calculée — ce n'est rien d'autre que déterminer la valeur finie et fixe vers laquelle tend la série sans jamais l'atteindre effectivement. Le processus infini, illimité, se ramène ainsi au calcul et à la détermination d'une limite, il devient un passage à la limite. Or il y a là un point d'une importance souveraine. Personne n'est capable d'effectuer une infinité d'opérations quelle qu'en soit la nature ; mais on peut effectuer, d'une façon plus ou moins aisée selon les circonstances, un passage à la limite pour la simple raison que semblable passage ne requiert qu'un nombre fini d'opérations. En d'autres termes, les processus infinis, l'analyse infinitésimale, l'algèbre de l'infini ne sont possibles que parce qu'ils se ramènent à une algèbre du fini.

La situation qui vient d'être décrite est brièvement, mais lumineusement exposée par un mathématicien contemporain. Dans son ouvrage intitulé *The Taylor Series* et destiné à servir d'introduction à la théorie des fonctions d'une variable complexe, l'auteur, P. Dienes, reconnaît nettement cette réduction de l'infini qui se trouve à la base même du traitement mathématique des séries. Le passage vaut la peine d'être cité à cause de sa précision et de sa clarté. Comme le passage en question contient des références à des expressions symboliques qui apparaissent dans le texte avant les lignes citées, nous devons d'abord mentionner ces expressions symboliques. Il s'agit de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ ad inf.,} \quad (1)$$

et de

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Et voici le passage en cause :

We first of all notice that an infinite succession of additions like (1) cannot be carried out, and consequently cannot be thought of as completely

1. La série n'est en effet qu'un cas particulier de suite : celui où chaque terme est constitué par des sommes partielles différant l'une de l'autre par la possession d'un terme de plus que la précédente.

2. Cf. KNOPP, *Theory and Application ...*, p.102.

carried out. Taking lim s_n (if it exists) as the sum of (1), we assign a ‹ sum › to (1) by a more or less arbitrary definition which, at first sight, seems very much like the original infinite succession of sums. The great advantage, however, of our definition of the sum as a limit of a sequence is that *the determination of limit does not involve an infinite succession of operations.* We have proved in a thouroughly *finite* way that 0 is the only number which is not isolated from the numbers of the form $1/n$, i. e. that $\lim 1/n = 0$. We determine in a similar direct way the limits of certain other concrete sequences and reduce unknown cases to known ones by simple and finite rules.[1]

Les considérations précédentes valent, *mutatis mutandis*, pour les autres processus infinis tels que les fractions continues,[2] les produits infinis, le calcul différentiel et le calcul intégral. On y trouve toujours la réduction du processus indéfini à un passage à la limite qui, lui, ne comporte plus qu'un nombre limité d'opérations.

Personne ne songerait à contester l'étonnante fécondité ni l'immense utilité des processus infinis. Ils ont ouvert la voie à des développements extraordinaires tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Grâce à ce nouveau calcul, grâce à l'utilisation des processus infinis, on parvient fort aisément et fort élégamment à des résultats que les prédécesseurs avaient parfois obtenus par d'autres méthodes, mais péniblement. Cette analyse infinitésimale qui s'est révélée d'une fécondité si prodigieuse a été considérée, à bon droit, comme une nouveauté ; elle a également été présentée comme une nouvelle prise de position devant l'infini. Alors que les mathématiciens plus anciens et, en particulier, les Grecs s'étaient carrément récusés devant l'infini, ceux du XVIIe siècle ont dû, courageusement, faire face à l'infini pour le maîtriser d'abord — pour autant que cela soit possible —, et pour l'utiliser ensuite, couramment, dans leurs calculs.

Il est vrai de dire que les mathématiciens grecs ont évité les processus infinis. Pourtant les idées et notions que les mathématiciens du XVIIe siècle ont exploitées avec un si rare bonheur n'avaient rien de nouveau pour les Grecs ; ils les connaissaient depuis fort longtemps. Une autre chose est également certaine : ils n'en ont pas tiré parti. Pourquoi ? On pourra avancer de nombreuses explica-

1. P. Dienes, *The Taylor Series*, New York, Dover, 1957, pp.70-71. Les soulignés sont de Dienes lui-même. Abel Rey, dans son ouvrage sur *L'apogée de la science technique grecque* (Paris, Albin Michel, 1948) écrit exactement dans le même sens : « L'infini en tant que tel se laisse atteindre par le fini, ou il nous échappe.» Ajoutons encore cette autre déclaration de Hermann Weyl, déjà rapportée plus haut : « Mathematics is the science of the infinite, its goal the symbolic comprehension of the infinite with human, that is finite, means.» (*The Open World*, New Haven, Yale Univ. Press, 1932, p.7).

2. Traitant des fractions continues infinies comme représentatives des nombres irrationnels, H. Davenport remarque : « Now the only way in which one can attach a meaning to the result of carrying out an infinite number of operations is by using the notion of a limit.» (*The Higher Arithmetic*, New York, Harper & Brothers, Harper Torchbooks, 1960, p.91).

tions, échafauder maintes hypothèses ingénieuses, mais il est probable qu'on ne saura jamais la véritable raison de cette abstention. On peut cependant se demander jusqu'à quel point l'absence d'un symbolisme numérique approprié aura empêché les Grecs de s'aventurer dans les processus infinis.[1]

Essayons toutefois de peindre, à grands traits il va sans dire, le climat qui prévalait à l'époque grecque où l'on trouve en germe l'analyse infinitésimale, au moins sous la forme du futur calcul intégral. Posons quelques jalons. Le nom de Zénon d'Élée vient tout d'abord à l'esprit. Quelles que soient les confusions que Zénon ait pu faire dans son plaidoyer pour rejeter le mouvement, il faut concéder qu'il a dû admettre l'infinie divisibilité du continu ; il n'aurait autrement jamais pu argumenter contre le mouvement.

La divisibilité de la grandeur était, chez les mathématiciens, une doctrine assez communément reçue au temps d'Aristote : elle est même rapportée par ce dernier comme une des raisons qui ont incité ses devanciers à poser l'infini.[2] Il sera lui-même de cet avis, précisant que le processus de division de la grandeur est tel que jamais on ne pourra proposer une longueur si petite qu'on ne pourrait pas dépasser en petitesse grâce au processus de division.[3] Mais Aristote ne s'arrête pas là, il va beaucoup plus loin en greffant sur ce processus de division un processus inverse d'apposition. Or ce processus d'apposition a ceci de significatif qu'il ne permet pas de dépasser toute quantité finie même s'il est poursuivi sans fin.[4]

Mais le mathématicien grec n'a jamais tiré profit de ces processus à l'infini bien qu'il ne les ignorât pas. Même la « méthode d'exhaustion » qui se situe dans le sillon des processus infinis n'a rien du processus véritablement infini. La majorité[5] des historiens de la mathématique grecque attribuent à Eudoxe l'invention de cette mé-

---

1. À ce propos, voir *infra*, note 4.

2. *Phys.*, III, c.4, 203 *b* 15 ; S. THOMAS, in *III Phys.*, lect.7.

3. *Phys.*, III, c.6, 206 *b* 18 ; S. THOMAS, in *III Phys.*, lect.10 ; voir aussi EUCLIDE, *Éléments*, X, prop.1.

4. *Phys.*, III, c.6, 206 *b* 18. Le commentaire de saint Thomas sur ce passage nous paraît étonnant. Saint Thomas en effet apporte là un exemple pour illustrer l'enseignement d'Aristote ; il veut montrer que le processus d'apposition, alimenté par un processus antérieur de division, permet de s'approcher indéfiniment, mais sans jamais l'atteindre, d'une valeur finie et déterminée. Nous dirions, nous, que le processus converge et possède une limite. Or, cet exemple se laisse traduire, sans la moindre difficulté, en langage analytique. Cette traduction nous fournit un exemple simple d'une série infinie convergente. Mais saint Thomas n'aurait pu faire cette traduction parce qu'il ne disposait pas, comme nous, des « chiffres arabes » qui rendent possible et aisée une telle traduction. Je suis persuadé que saint Thomas aurait fait comme nous s'il avait connu le symbolisme numérique que nous utilisons.

5. T. Heath fait exception : il fait remonter à Antiphon l'invention du principe d'exhaustion. Cf. P.-H. MICHEL, *De Pythagore à Euclide*, Paris, Les Belles-Lettres, 1950, pp.238-39, 673-74 ; T. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, Clarendon Press, 1949, p.96.

thode, utilisée avec un rare succès par Archimède, à tel point que nombreux sont ceux qui, à la suite de Leibniz, voient en lui le précurseur, voire le «premier fondateur du calcul infinitésimal».[1] La méthode d'exhaustion, à l'instar des processus infinis, est un processus d'approximation. Mais si la méthode d'exhaustion consiste dans un processus susceptible d'être indéfiniment poursuivi, il reste que les Grecs, et en particulier Archimède, l'ont conçue et utilisée comme un processus strictement fini. À preuve, la façon dont Archimède utilise le processus pour évaluer la longueur de la circonférence d'un cercle dans son traité de *La mesure du cercle*. Il inscrit dans un cercle une suite de polygones réguliers allant du triangle équilatéral jusqu'au polygone régulier de 96 côtés dont il évalue le périmètre. D'autre part, il circonscrit au même cercle une suite de polygones réguliers dont le dernier aura également 96 côtés ; et il évalue le périmètre de ce polygone. Il aboutit, finalement, à cette inégalité :

$$3\,10/71 < \pi = C/2R = C/D < 3\,1/7,$$

où C désigne la longueur de la circonférence, R le rayon du cercle et D le diamètre du cercle. La méthode d'approximation des Grecs est un processus limité qui évite totalement la répétition illimitée du processus infini. Pas plus que l'analyse ancienne, l'analyse moderne n'est capable d'effectuer la répétition illimitée d'une même opération dans une suite infinie. À la différence de son prédécesseur grec, le mathématicien moderne n'évitera pas l'infini en se rabattant sur une suite finie quoique de caractère semblable, mais il transformera le processus infini indiqué en un autre processus qui n'exige qu'un nombre fini d'opérations et qui consiste dans un passage à la limite, c'est-à-dire dans le calcul de la valeur vers laquelle tend le processus infini s'il pouvait être effectué. On ne peut s'empêcher de citer ici un passage de T. L. Heath qui décrit fort bien le point de vue grec :

> They [the Greeks] never spoke of an infinitely close approximation of a limiting value of the sum of a series extending to an infinite number of terms. Yet they must have arrived practically at such a conception, e.g., in the case of the proposition that circles are to one another as the squares on their diameters, they must have been in the first instance led to infer the truth of the proposition by the idea that the circle could be regarded as the limit of an inscribed regular polygon with an indefinitely increased number of correspondingly small sides. They did not, however, rest satisfied with such an inference ; they strove after an irrefragable proof, and this, from the nature of the case, could only be an indirect one. Accordingly we always find, in proofs by the method of exhaustion, a demonstration that an impossibility is involved by any other assumption than that which the proposition maintains. Moreover this stringent verification, by means of a double

---

1. Abel Rey, *L'apogée de la science technique grecque*, Paris, Albin Michel, 1948, pp.257-58.

reductio ad absurdum, is repeated in every individual instance of the use of the method of exhaustion ; there is no attempt to establish, in lieu of this part of the proof, any general propositions which could be simply quoted in any particular case.[1]

Terminons cette partie en remarquant que malgré la place énorme que l'infini s'est taillée en mathématiques, grâce aux processus infinis sous toutes leurs formes, la dernière étape n'était pas encore franchie, la dernière conquête du territoire restait à faire. Elle vint à la fin du siècle dernier avec la création de l'arithmétique transfinie par Georg Cantor. Jusqu'à ce moment, les mathématiciens avaient admis et utilisé avec un succès retentissant et sans cesse accru l'infini en mathématiques. Mais il ne s'agissait encore uniquement que de l'infini qualifié de potentiel, par opposition à l'infini actuel. Cantor introduisit l'infini actuel en mathématiques.

IV. LES ENSEMBLES ET L'INFINI

A. Données primitives de la théorie des ensembles

L'arithmétique transfinie présuppose la théorie des ensembles. Il serait en conséquence inutile d'entreprendre l'étude de la première sans s'initier d'abord aux ensembles. L'étude que nous entendons faire de l'arithmétique transfinie nous dispense toutefois de nous aventurer très avant dans le domaine des ensembles. Un bref exposé des notions fondamentales est tout ce qui nous est nécessaire.

Tous les mathématiciens qui ont traité des ensembles — on parle aussi d'aggrégats, de classe — ne croient pas nécessaire de dire ce qu'est un ensemble. Certains, tel Sierpinski, considèrent qu'il s'agit là d'une notion tellement primitive, tellement évidente et connue de tous qu'il suffit d'en donner des exemples pour la faire connaître parfaitement.[2] D'autres cependant, tel Hausdorff, s'ils se rangent en définitive à cet avis, voudront quand même ajouter une brève explication. Hausdorff précisera donc qu'« un ensemble résulte de la réunion en un tout d'entités individuelles. Un ensemble est une multitude pensée comme une unité. »[3] La plupart des auteurs, toutefois, donnent d'un ensemble la définition ou description qu'en a proposée Georg Cantor lui-même : « By an ‹ aggregate › (Menge) we are to understand any collection

1. HEATH, *The Works of Archimedes*, pp.CXLII-CXLIII. Voir aussi Carl B. BOYER, *The Concepts of the Calculus*, New York, Hafner, 1949, p.53 ; REY, *L'apogée de la science*..., p.257.

2. Waclaw SIERPINSKI, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars, 1950, p.1.

3. F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, 3e éd., New York, Dover Publications, p.11 : « Eine Menge entsteht durch Zusammenfassung von Einzeldingen zu einem Ganzen. Eine Menge ist eine Vielheit, als Einheit gedacht. »

into a whole (Zusammenfassung zu einem Ganzen) M of definite and separate objects m of our intuition or our thought. »[1] L'ensemble apparaît donc comme la réunion en un tout d'objets bien déterminés et distincts de notre intuition ou de notre pensée. Cette description appelle quelques remarques que nous ferons aussi brèves que possible.

On ne peut vraiment parler de réunion que là où il y a une pluralité, mais une pluralité ramenée à quelque chose d'un. Pluralité et unité, tels sont donc les deux éléments constitutifs de la notion d'ensemble.[2] L'unité inscrite dans la notion d'ensemble est d'une extrême importance : s'il n'y avait que pure multiplicité, dispersion totale, le traitement des ensembles, des ensembles infinis en particulier, deviendrait *a priori* impossible. Mais de quelle unité s'agit-il? Si l'unité d'un ensemble peut être fondée sur la similitude de nature des éléments qui le composent, il n'est pas indispensable à la notion commune d'ensemble qu'elle possède une unité aussi ferme. L'unité requise et suffisante à la notion d'ensemble est tout ce qu'il y a de plus fragile et de plus ténu : il suffit en effet que l'intelligence mette ensemble plusieurs choses qui peuvent être aussi disparates qu'on voudra. C'est une unité accidentelle qu'on serait tenté d'appeler, assez à propos du reste, une unité de fabrication :[3] elle est en effet fondée souvent sur la seule décision et le seul caprice de celui qui conçoit un ensemble.

Il importe peu à la notion commune d'ensemble que celui-ci soit composé d'éléments de même nature ou non. Tout ce qui est requis c'est qu'ils soient individuellement distincts l'un de l'autre de telle sorte qu'un même symbole représentatif, s'il est répété, n'est censé représenter qu'un seul et même objet. En vertu de cette condition, un ensemble tel que (1, 2, 1, 3) n'est aucunement différent de l'ensemble (1, 2, 3). En outre la notion commune d'ensemble ne tient pas compte de l'ordre des éléments : ainsi, (1, 2, a, b) et (a, b, 2, 1) seront considérés comme un seul et même ensemble. On ne doit pas toutefois en conclure que l'ordre des éléments est toujours indifférent. La théorie des ensembles tient parfois compte de l'ordre des éléments, elle

---

1. Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. Philip E. B. Jourdain, New York, Dover, 1915, p.85.

2. Il faut toutefois noter que les besoins de la généralisation des opérations, d'une part, et, d'autre part, ceux de la simplification et de l'uniformisation du vocabulaire inciteront à étendre l'usage de ce terme « ensemble » même aux cas où il ne se trouve aucune pluralité : on parlera couramment de « l'ensemble unité » et de « l'ensemble nul ». Cette situation correspond à celle de « un » et de « zéro » qu'on n'a plus aucun scrupule à appeler des nombres.

3. Saint Thomas, sur ce point, a deux passages fort éloquents. Ils méritent d'être mentionnés. Tous deux sont tirés de son commentaire sur les *Sentences*. « In collectivo (nomine) enim est duo considerare, scilicet multitudinem eorum quae colliguntur, quae simpliciter sunt per essentiam divisa ; et id in quo colliguntur, quae est *minima unitas.* » (*In I Sent.*, d.24, q.2, a.2, ad 3). « Et inde potest esse quod unum est pars multitudinis, et quod ipsa multitudo dicitur quodammodo unum, prout scilicet aliquid non dividitur, *ad minus secundum intellectum aggregantem.* » (*Ibid.*, q.1, a.3, ad 4).

étudie parfois des *ensembles ordonnés*, mais leur étude constitue un chapitre spécial de la théorie générale et commune des ensembles, chapitre qui se situe en dehors de nos préoccupations présentes.

D'après la définition précédente, tout ensemble est de la nature d'un tout, mieux encore, d'un tout intégral ; et les parties qui le composent et le constituent sont ses parties intégrantes, ses éléments constitutifs, quelle que soit leur nature. On dira couramment, en conséquence, que l'ensemble contient, renferme ses éléments constitutifs et que ceux-ci sont contenus dans l'ensemble et lui appartiennent. Cette relation d'appartenance d'un élément à un ensemble s'exprimera symboliquement par $m \in E$, où m représente l'élément, E un ensemble quelconque et $\in$ la relation d'appartenance.

La théorie des ensembles s'occupe de bien d'autres relations que de la relation d'appartenance et qui sont de loin beaucoup plus importantes qu'elle. Ce sont les diverses relations qui surgissent de la comparaison des ensembles entre eux. Si on compare deux ensembles, diverses situations peuvent se présenter dont voici la première. Deux ensembles peuvent ou bien être apparentés ou bien être complètement étrangers l'un à l'autre. S'ils sont étrangers, c'est qu'ils n'ont aucun élément en commun ; on dira alors qu'ils sont disjoints. S'ils ne sont pas disjoints, mais apparentés l'un à l'autre, cela veut dire qu'ils ont en commun au moins un élément. Par exemple, les deux ensembles

$$(1, 3, 5, 7, 9) \quad \text{et} \quad (2, 4, 5, 6, 8, 10)$$

sont apparentés parce qu'ils ont l'élément 5 en commun. Plusieurs cas sont alors possibles. Il arrivera, par exemple, que deux ensembles seront constitués exactement des mêmes éléments : on les dira alors égaux. Ils seraient plus justement appelés identiques, car, dans la théorie des ensembles, la relation d'égalité comporte plus que la seule « même pluralité » d'éléments ; elle requiert en outre l'identité de ces éléments dans un ensemble comme dans l'autre : v.g., (1, 2, 3, 4) est *égal* à (4, 3, 2, 1). Lorsque, d'un ensemble à l'autre, l'identité des éléments disparaît pour ne laisser subsister que la seule « même pluralité » d'éléments on aura la relation d'équivalence, mais non la relation d'égalité. Ainsi les ensembles (1, 2, 3, 4) et (A, B, C, D) sont équivalents, mais non pas égaux. On voit sans peine que deux ensembles égaux sont équivalents, mais deux ensembles équivalents ne sont pas égaux si ce n'est par accident. Cette notion d'équivalence de deux ensembles est d'une importance primordiale pour l'arithmétique transfinie. Le symbole usuel d'égalité servira aussi bien pour les ensembles que pour les nombres. Si E et M sont deux ensembles égaux, on écrira : $E = M$. S'ils sont simplement équivalents, on écrira : $E \sim M$.

Entre les cas extrêmes où deux ensembles sont disjoints ou égaux, s'échelonnent divers cas où les deux ensembles, cependant, possèdent toujours une partie commune. Parfois chacun des ensembles aura sa partie propre en plus de la partie commune. Parfois encore, un seul possédera une partie propre en plus de la partie commune ; en pareil cas, tous les éléments du premier ensemble se retrouveront dans le second qui, lui, englobera un nombre plus ou moins considérable d'éléments additionnels, v. g., (a, b, c) et (a, b, c, d, e, f, g). En d'autres termes, dans ce cas, tous et chacun des éléments d'un ensemble sont aussi des éléments de l'autre ensemble sans que l'inverse soit vrai. On dénomme *sous-ensemble* celui dont tous les éléments sont contenus dans l'autre : le sous-ensemble apparaît ainsi comme une partie, une partie intégrante, d'un ensemble. Tel est le sens strict du terme sous-ensemble. Par extension toutefois, on parlera encore de sous-ensemble lorsque le sous-ensemble et l'ensemble sont identiques ; il est clair que le terme « sous-ensemble » est alors employé dans un sens large. Cela veut dire, en d'autres mots, que tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même, un sous-ensemble impropre, cela va de soi. Voyons un exemple. Soit l'ensemble $M = (a, b, c, d, e)$ et l'ensemble $E = (a, c, e)$. E sera un sous-ensemble propre de M, ce que l'on désignera symboliquement par $E \subset M$. Quant à M lui-même, il est aussi un sous-ensemble de M, mais un sous-ensemble impropre puisque $M = M$.

Ces données ont besoin d'être complétées. Car le mathématicien ne se contente pas d'établir des relations entre deux ensembles ; il désire en outre combiner entre eux deux ou plusieurs ensembles ou, si l'on préfère, il désire définir et effectuer des opérations sur les ensembles. Il nous faut donc mentionner maintenant les opérations principales qu'on peut effectuer avec les ensembles. Elles sont au nombre de deux : la réunion et l'intersection.

L'union ou la réunion de deux ensembles est la mise en commun de tous les éléments ou termes qui appartiennent à l'un *ou* à l'autre ensemble que l'on veut fusionner. On appellera encore cette opération *somme logique* à cause de sa ressemblance avec l'addition ordinaire et le signal usuel de l'addition servira à la désigner. Si $A = (a, b, c, d)$ et $B = (a, c, m, n)$, la réunion de A et B donnera un ensemble C tel que

$$C = A + B = (a, b, c, d, m, n).$$

L'ensemble résultant de l'union de deux ensembles est donc constitué par la partie commune aux deux ensembles s'ils en ont une, plus la partie propre à chacun.

L'intersection de deux ensembles engendrera un ensemble formé de tous les éléments appartenant *à la fois* à l'un et à l'autre ensemble ; en d'autres termes, il est composé de leur partie commune. Cette opération sera désignée aussi par l'expression *produit logique* bien qu'elle n'ait aucune ressemblance avec l'opération arithmétique du même nom. Si l'on reprend les deux ensembles A et B définis plus haut, nous aurons, pour leur intersection, un ensemble D tel que

$$D = A . B = (a, c).$$

Il est clair que l'intersection de deux ensembles disjoints, i.e., sans partie commune donnera l'ensemble vide O. Soient, par exemple, A=(m, n) et B=(r,s) ; leur intersection sera : A.B=O.

Une étude plus élaborée exigerait qu'on s'attarde à considérer les propriétés relatives à chacune de ces opérations et celles qui appartiennent aux deux lorsqu'elles sont combinées ensemble. Mais, pour nous, il est plus important d'examiner brièvement une autre division des ensembles. D'après cette nouvelle division, le domaine des ensembles se partage en deux grandes catégories : les ensembles finis et les ensembles infinis. Il n'est pas facile de marquer la différence entre ces deux catégories sans tomber dans un cercle vicieux. On dira par exemple qu'un ensemble est fini ou infini selon qu'il renferme ou non un nombre ou une pluralité finie d'éléments. On tentera de camoufler le cercle vicieux en disant que l'ensemble fini est celui dont les éléments correspondent à une section de la série des nombres naturels, sachant bien, mais évitant de l'exprimer, que cette série est illimitée, infinie. Nous n'allons toutefois pas nous arrêter à ces difficultés ; nous nous contentons, sur ce point, de rapporter ce que disent les mathématiciens.

La classe des ensembles infinis renferme deux sortes d'ensembles de cette nature : les ensembles *dénombrables* et les ensembles *non-dénombrables*. Selon la terminologie reconnue par l'usage, un ensemble infini est qualifié de dénombrable si ses éléments peuvent être mis en correspondance bi-univoque avec les nombres naturels ; mais, si pareille correspondance est impossible, il sera dit non-dénombrable. En qualifiant de dénombrable un ensemble infini, on a forgé un terme impropre à la situation qu'il entend caractériser, on a inventé une terminologie qui n'est pas heureuse. Et on a encore aggravé la situation en incluant sous le vocable d'ensembles dénombrables même les ensembles finis. De sorte que, pour respecter les usages reçus parmi les mathématiciens, il faut entendre par ensembles dénombrables soit les ensembles finis soit les ensembles infinis qui sont équivalents aux nombres naturels. Et ainsi, la catégorie des ensembles dénombrables chevauche sur les ensembles finis et sur les ensembles infinis dont elle englobe une section.[1] Si l'on peut et si l'on doit regretter cette situation, on ne peut malheureusement rien faire d'autre que de continuer à utiliser cette terminologie.

B. *L'arithmétique transfinie*

L'arithmétique transfinie prend place parmi les études mathématiques de l'infini. Aucune autre discipline n'en fait une étude aussi expresse, car, seule parmi toutes les autres, elle l'étudie pour lui-même. Et c'est justement pour cette raison qu'elle constitue en quelque sorte

1. Cf. E. KAMKE, *Theory of Sets*, trad. F. BAGEMIHL, New York, Dover Publ., Inc., pp.1-2.

comme le dernier pallier, le niveau supérieur des études mathématiques consacrées à l'infini. Mais on pourrait difficilement y voir un couronnement, même si c'est là l'opinion de plusieurs. Comment, en effet, voir un couronnement dans ce qui ébranle les assises mêmes d'un édifice et le secoue dangereusement. L'arithmétique transfinie donne en effet naissance à d'inquiétants paradoxes, à des antinomies indésirables qu'on s'efforce d'éliminer. Mais les solutions qu'on propose pour écarter ces situations gênantes paraissent souvent plus factices que convaincantes ; elles ont parfois même l'allure de pirouettes exigeant des contorsions ni naturelles ni rassurantes.

Nous n'entreprendrons pas d'exposer ici toute l'arithmétique transfinie. Seules les données primitives et fondamentales sont indispensables à notre étude. Le but assez limité que nous poursuivons ne nous dispense pas toutefois de la nécessité d'une vue globale de l'arithmétique transfinie. Et le meilleur moyen d'y parvenir, c'est, semble-t-il, d'expliquer le plus simplement du monde ce qui se cache derrière ce titre d'arithmétique transfinie en établissant une comparaison entre elle et l'arithmétique élémentaire, celle qui nous est si familière et depuis si longtemps connue.

L'arithmétique transfinie est d'abord une arithmétique. De ce fait, elle partagera avec l'arithmétique ordinaire ou élémentaire, certains traits communs aux deux. Qu'est-ce donc que l'arithmétique qui nous est familière ? Dissipons tout d'abord une équivoque possible. Le mot « arithmétique » peut en effet désigner deux disciplines : la théorie des nombres ou arithmétique supérieure que les Grecs appelait simplement arithmétique, et aussi la discipline élémentaire du calcul que les Grecs appelaient « logistique », mais que nous appelons couramment, de nos jours, arithmétique. C'est ce dernier sens que nous retenons, celui de discipline du calcul élémentaire.

Discipline primitive et élémentaire, l'arithmétique enseigne comment effectuer les opérations les plus simples et les plus fondamentales avec les nombres les plus simples et les plus primitifs. Ces opérations fondamentales sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, auxquelles on pourrait encore ajouter l'élévation à une puissance et l'extraction d'une racine : elles consistent toutes à combiner deux nombres selon des lois bien déterminées de façon à obtenir un troisième nombre également bien défini. Les entités mathématiques sur lesquelles portent ces opérations sont les premiers ensembles de nombres : les nombres naturels, les nombres entiers, les nombres rationnels et les nombres réels. Tous ces ensembles sont successivement issus de l'ensemble initial, celui des nombres naturels. À l'intérieur de chacun, on trouve une infinité d'éléments ordonnés en une suite de valeurs croissantes, mais où chaque élément représente une quantité finie, bornée.

À l'instar de sa parente, l'arithmétique transfinie comportera, elle aussi, un certain nombre d'opérations : elles se réduiront à trois, l'addition, la multiplication et l'élévation à une puissance. Mais ces opérations s'effectueront non plus sur des nombres ordinaires, finis, mais sur de nouvelles entités mathématiques qu'on appellera de préférence « nombres transfinis » plutôt que « nombres infinis » comme si on voulait éviter de parler de nombres infinis. On utilise encore, pour les désigner, le mot « puissance » — en allemand, *mächtigkeit*. L'arithmétique qui s'occupe de ces nombres transfinis sera, en conséquence, elle-même appelée « transfinie ».

L'arithmétique transfinie comporte deux grandes parties. La première s'occupe des nombres cardinaux transfinis, la seconde des nombres ordinaux transfinis. Les premiers correspondent aux ensembles infinis où l'on ne porte aucun intérêt à l'ordre des termes qui les composent, mais seulement à la pluralité des éléments dont le nombre cardinal est l'expression et la mesure ; les seconds correspondent aux ensembles infinis où l'on retient non seulement la pluralité, mais où l'on tient compte en outre de l'ordre selon lequel les éléments peuvent être disposés à l'intérieur de chaque ensemble.

Puisque l'arithmétique est une discipline qui effectue des opérations avec des nombres, il faut de toute nécessité que ceux-ci lui soient présupposés. Dans le cas de l'arithmétique ordinaire, nous connaissons les nombres soumis à ses opérations de calcul. L'existence de ces nombres ne pose aucun problème, elle est justifiée avec toute l'évidence souhaitable par l'existence de collections finies dont ces nombres expriment et mesurent la pluralité. Mais l'arithmétique transfinie opère avec une catégorie de nombres tout à fait distincts des premiers. Ils se situent au-delà des nombres ordinaires et ils nous sont, pour le moment, inconnus. Il faut donc commencer par les introduire. Cette introduction est une tâche délicate, car il ne suffit pas d'inventer une classe plus ou moins abondante de nouveaux symboles qu'on conviendra d'appeler « nombres transfinis », mais il faut encore justifier et garantir l'existence de ces nouveaux nombres ; c'est là la partie vraiment épineuse de l'entreprise, comme nous le verrons dans la suite.

Le nombre transfini constitue une extension de la notion de nombre naturel. On sait que ce dernier n'est rien d'autre qu'une pluralité d'unités ou, comme disaient les Anciens, une multitude mesurée par l'un. Cette notion primitive, fondamentale, a été élargie, et cela, dans deux directions bien différentes.

Les besoins de la mensuration du continu aussi bien que le désir de généraliser les opérations de soustraction, de division et d'extraction d'une racine ont nécessité l'introduction de nouvelles entités mathématiques formant des ensembles de plus en plus riches.[1] Ces ensembles sont ceux des nombres entiers, des nombres rationnels et des nombres irrationnels qui, réunis aux précédents, forment l'en-

1. Courant et Robbins, *What is Mathematics ?*, pp.52-61.

semble des nombres réels. Toutes ces nouvelles entités mathématiques ont éventuellement été appelées « nombres » — et bien d'autres à leur suite —, ce qui témoigne d'un élargissement, d'une généralisation de la notion même de nombre.[1] Lorsqu'on tente d'établir une correspondance entre les points d'une droite et les nombres, l'on ne réussit à atteindre la perfection de la correspondance bi-univoque[2] qu'avec les nombres réels. En vertu de cette correspondance, on se croira autorisé à parler des nombres réels comme du *continu arithmétique* par comparaison avec la droite qu'on appellera alors le *continu géométrique*.[3] Nous trouvons là, et aussi dans cette nécessité des nombres réels pour mesurer convenablement le continu, le fondement requis pour caractériser la première ligne d'extension du nombre naturel. Nous pouvons en effet dire que cette généralisation s'oriente du discret vers le continu tout en demeurant à l'intérieur du fini, car chacun des nombres appartenant à l'un ou l'autre de ces différents ensembles représente une quantité bornée, limitée, finie.

La seconde généralisation revêt un caractère tout différent. Tandis que la première va du discret au continu à l'intérieur du fini, celle-ci va du fini au transfini à l'intérieur du discret. C'est encore un élargissement de la notion de nombre, mais d'une nature tout autre bien que lui aussi prenne son point de départ dans le nombre naturel. Mais alors que le nombre naturel mesure des ensembles finis et constitue une pluralité finie, le nombre transfini mesure des ensembles infinis d'unités discrètes. Cantor lui-même nous éclaire là-dessus de façon non équivoque. Malgré sa longueur, le passage mérite d'être cité en entier, tellement il est révélateur.

The previous exposition of my investigation in the theory of manifolds [i.e., ensembles] has arrived at a point where its continuation becomes dependent upon a generalization of the concept of the real integer beyond the usual limits; a generalization taking a direction which, as far as I know, nobody has looked for hitherto.

I depend to such an extent on that generalization of the concept of number that without it I should hardly be able to take freely even the smallest step forward in the theory of sets; may this serve as a justification, or, if necessary, as an apology for my introducing apparently strange ideas into my considerations. As a matter of fact, the undertaking is the generalization or continuation of the series of real integers beyond the infinite. Daring as this might appear, I can express not only the hope but the firm conviction that this generalization will, in the course of time, have to be conceived as a quite simple, suitable and natural step. At the same time,

1. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, p.25.

2. Il existe une correspondance bi-univoque entre deux ensembles A et B si, d'une part, à chaque élément de A correspond un et un seul élément de B et si, inversement, à chaque élément de B correspond un et un seul élément de A.

3. Dirk J. Struik, *Lectures in Analytic and Projective Geometry*, Cambridge, Addison-Wesley Publ. Co., 1953, p.2.

I am well aware that, by taking such a step, I am setting myself in certain opposition to wide-spread views on the infinite in mathematics and to current opinions as to the nature of number.[1]

Point à noter soigneusement, ce n'est pas en ajoutant toujours de nouveaux ensembles accrus à la suite des ensembles finis qu'on peut atteindre les ensembles infinis. Parallèlement, ce n'est pas en ajoutant des nombres de plus en plus grands à la suite ordonnée des nombres finis qu'on parviendra aux nombres transfinis. En particulier, les nombres naturels forment une suite ordonnée et ouverte : elle n'a pas de dernier terme. Si grand que soit celui qu'on a posé ou imaginé, on peut toujours en concevoir un plus grand. On pourrait croire qu'en prolongeant indéfiniment cette suite, en lui ajoutant toujours des nombres de plus en plus grands, on finirait par atteindre un premier nombre transfini ; mais c'est là une illusion. Cette voie est sans issue, elle nous mène nulle part, elle nous laisse irrémédiablement enfermés dans le fini. C'est ce qu'exprime fort bien Bertrand Russell dans le passage suivant :

> Every number to which we are accustomed, except 0, has another number before it, from which it results by adding 1 ; but the first infinite number does not have this property. The numbers before it form an infinite series, containing all the ordinary finite numbers, having no maximum, no last finite number, after which one little step would plunge us into the infinite. If it is assumed that the first infinite number is reached by a succession of small steps, it is easy to show that it is self-contradictory. The first infinite number is, in fact, beyond the whole unending series of finite numbers.[2]

En d'autres termes, on ne peut passer continûment du fini au transfini. Ce n'est que par une savante et audacieuse voltige qui nous transporte brusquement et d'emblée dans l'infini que nous pouvons y parvenir. Il nous faut maintenant dire en quoi consiste cette acrobatie.

La question des nombres cardinaux — les seuls dont nous ayons à nous occuper — est intimement liée à l'évaluation des ensembles. Le nombre cardinal en effet, qu'il soit fini ou transfini, est sans doute une pluralité d'unités abstraites, mais il a en outre comme fonction de révéler et de mesurer la pluralité d'un ensemble particulier.[3] Le nombre cardinal fini correspond à la pluralité d'un ensemble fini ; le nombre cardinal transfini, à celle d'un ensemble infini. À chaque plu-

1. Ce texte est cité par Abraham A. FRAENKEL dans *Abstract Set Theory*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1953, p.4.

2. Bertrand RUSSELL, *Our Knowledge of the External World*, New York, The New American Library, 1960, p.142.

3. On songe naturellement, ici, à la distinction faite par saint Thomas entre *numerus numeratus* et *numerus quo numeramus*. Ce dernier est, lui aussi, une pluralité mesurée par l'un, mais c'est une pluralité abstraite et qui sert à évaluer les autres pluralités. Cf. *In IV Phys.*, lect.17 et 19 ; *Ia*, q.30, a.1, ad 4.

ralité différente, finie ou infinie, correspond un nombre cardinal, fini ou transfini ; selon qu'un ensemble renferme plus ou moins d'unités, les nombres cardinaux correspondants seront plus ou moins grands. En conséquence, les nombres cardinaux forment une suite ordonnée.

La question se pose donc de savoir comment évaluer et mesurer les ensembles infinis afin de classifier les nombres transfinis qui en révèlent la pluralité. Une suggestion se présente spontanément à l'esprit : pour évaluer un ensemble infini, dira-t-on, il suffit de compter ou énumérer les unités qui le composent. Le processus suggéré est certes excellent en lui-même. Mais il a un défaut : celui de n'être utile que pour le fini et d'être tout à fait impraticable pour les ensembles infinis qui ne peuvent être ni parcourus ni franchis et, partant, ni évalués ni mesurés de cette façon. Mesurer, en effet, c'est déterminer la quantité d'une chose, c'est assurer une connaissance non pas quelconque, mais très précise d'une quantité. Mesurer suppose la mise en œuvre d'un processus de comparaison. Il est clair que si pareil processus ne devait jamais aboutir à un terme, mais demeurer toujours en devenir, il ne saurait être question d'en tirer une connaissance déterminée : dans de telles conditions, la mensuration ne conduit à aucun résultat assuré, la mesure devient impossible. Et ainsi, on comprend sans peine que le processus itératif d'énumération ne saurait rien donner dans le cas des ensembles infinis.

Mais, devant la vanité de la tentative d'évaluer des ensembles infinis par voie énumérative, le mathématicien ne se tient pas pour vaincu. Il cherche une autre voie, une voie fructueuse. Cette voie, il la découvrira en analysant minutieusement la marche suivie dans l'évaluation des ensembles finis eux-mêmes.

Il faut tout d'abord reconnaître que notre façon d'évaluer un ensemble fini, i.e., de déterminer sa pluralité par énumération est un procédé qui n'a rien d'élémentaire ni de primitif. C'est au contraire, malgré les apparences, un procédé évolué et complexe. Il comporte en fait deux temps, deux étapes. Ces deux temps correspondent aux deux questions auxquelles il faut répondre devant un ensemble donné : (1) cet ensemble a-t-il ou non *même* pluralité qu'un autre ensemble dont la pluralité nous est déjà connue ; (2) quelle est en fait *cette pluralité* qu'il partage avec un autre ensemble ? Lorsqu'on a répondu à la première question, l'on n'est encore qu'à mi-chemin de la connaissance désirée : l'on sait que l'ensemble en cause possède *même pluralité* qu'un autre, mais il reste à savoir quelle est *cette pluralité.*

Le procédé le plus primitif pour savoir si deux ensembles finis ont même pluralité, s'ils possèdent des éléments en quantité égale, si, en d'autres termes, ils ont même nombre cardinal, c'est de les comparer élément à élément. Deux ensembles fort simples aideront à comprendre. Voici deux paniers remplis, l'un de pommes, l'autre de pêches. Peut-on, même sans savoir compter, découvrir s'il y a autant de pommes que de pêches ? Assurément oui, et rien n'est plus simple. Il suffit de vider graduellement et simultanément les deux paniers en retirant une pomme de la main gauche, une pêche de la main droite. La répétition plus ou moins longue de cette opération aboutira à l'un ou à l'autre des résultats suivants : ou bien les deux paniers deviendront vides en même temps ou bien l'un sera vide avant l'autre. Dans le premier cas, on conclura qu'il y a autant de pommes que de pêches, que les deux ensembles ont même pluralité, qu'ils sont équivalents et qu'ils ont même nombre cardinal ; dans l'autre cas, on les dira inégaux. En cas d'égalité, on saura exactement combien il y a de pommes si l'on sait déjà combien il y a de pêches et inversement. Mais, de soi, le procédé comparatif que nous avons décrit ne saurait fournir qu'une connaissance incomplète. Pourtant, si incomplète soit-elle, cette première connaissance est tout à fait indispensable.

Voici un autre exemple, encore plus simple que le précédent : il illustre le cas où l'on peut, d'un seul coup d'œil et sans le moindre recours à une comparaison itérative, décider si deux ensembles sont équivalents ou non. Imaginons une salle contenant des fauteuils et où sont réunies des personnes. Si chaque fauteuil est occupé par une seule personne, si aucun fauteuil ne demeure inoccupé et aucune personne n'est debout, on sait immédiatement qu'il y a autant de fauteuils que de personnes. Sinon, les deux ensembles n'ont pas même pluralité.

Ce qui nous a permis de dire qu'il y a même pluralité, lorsque tel est le cas, c'est cette association un à un entre pommes et pêches, ou entre fauteuils et personnes. Dans son jargon technique, le mathématicien appelle pareille association une correspondance bi-univoque. Le qualificatif *bi-univoque* veut simplement dire : deux fois univoque, c'est-à-dire univoque dans un sens et univoque dans l'autre de telle sorte qu'à chaque élément du premier ensemble correspond un et un seul du second et, inversement, à chaque élément du second ensemble correspond un et un seul du premier. En pareil cas, le mathématicien estimera légitime de raisonner comme suit : il existe une correspondance bi-univoque entre deux ensembles, donc ces deux ensembles sont équivalents. Dire de deux ensembles qu'ils sont équivalents, cela signifie qu'ils possèdent une même pluralité d'éléments ; et s'ils ont même pluralité, ils ont même nombre cardinal ou sont mesurés par un même nombre cardinal.

Mais pour savoir quelle est exactement la pluralité d'un ensemble proposé, il ne suffit pas de savoir qu'il a même pluralité qu'un autre à moins qu'on sache déjà la pluralité de ce dernier. L'évaluation des ensembles finis suppose donc une seconde étape, un deuxième temps que nous expliquons brièvement. Cette seconde étape réside essentiellement dans la construction d'une suite-modèle d'ensembles disposés et ordonnés selon une pluralité croissante. On y parvient en procédant ainsi. Prenons deux ensembles quelconques M et N et supposons qu'ils ne sont pas équivalents. Leur pluralité diffère donc par une ou plusieurs unités. Dans le premier cas, M et N seront des voisins immédiats dans la suite ordonnée en voie de construction. S'ils diffèrent par plus d'une unité, nous construirons ce segment de la suite qui viendra combler l'intervalle séparant M de N. On obtient ainsi :

$$\ldots\ M,\ M+1,\ M+2,\ M+3,\ \ldots\ N, \ldots$$

On peut facilement compléter la partie initiale de la suite en construisant de proche en proche tous les ensembles qui se succèdent à partir de l'unité jusqu'à M. On obtient alors :

$$1, 2, 3, 4, \ldots M, M+1, M+2, M+3, \ldots N, \ldots$$

De même on peut allonger la suite aussi loin qu'on veut en construisant les ensembles qui succèdent à N et qui diffèrent tous par une unité. On a alors :

$$1, 2, 3, 4, \ldots M, M+1, M+2, M+3, \ldots N, N+1, N+2, \ldots$$

Cette suite-modèle pourrait être faite d'objets concrets. On pourrait l'installer dans un musée. Chaque fois que quelqu'un voudrait évaluer un ensemble, il pourrait alors se rendre au musée et chercher à quel ensemble de la suite-modèle correspond bi-univoquement l'ensemble dont il veut connaître la pluralité. Connaissant déjà les pluralités ordonnées des membres de la suite-modèle, la correspondance bi-univoque nous ferait connaître d'emblée la pluralité exacte de l'ensemble à évaluer. Tout cela est fort bien, mais on devine sans peine les inconvénients de cette méthode. Voilà pourquoi on a vite compris qu'il y aurait un immense avantage à substituer à cette suite concrète, une autre suite-modèle, une suite abstraite celle-là, qu'on peut retenir de mémoire et qui peut ainsi nous accompagner sans cesse.[1] Quand on énumère, quand on dénombre un ensemble comme on a appris à le faire, que fait-on réellement ? Pas autre chose qu'établir une correspondance bi-univoque entre l'ensemble à évaluer et les unités d'un des ensembles de la suite-modèle abstraite, i.e., celle des nombres naturels 1, 2, 3, ... La dernière unité de l'ensemble de la suite-modèle qu'on associe au dernier élément de l'ensemble à mesurer nous fournit une connaissance exacte de la pluralité d'un ensemble. Chacune de ces

1. D'aucuns auront envie de sourire en lisant cette remarque. Elle n'est pourtant pas dénuée de fondement. Elle ne fait que reconnaître et exprimer une tendance spontanée de l'homme à choisir, comme étalons de mesure des longueurs, des membres et parties de son corps. Ces mesures qu'on appelle : le pouce, le pied, la coudée, la brasse ne proviennent-elles pas de ce qu'on se servait de ces membres corporels pour évaluer des longueurs ? La mensuration effectuée à l'aide de pareils instruments corporels ne pouvait pas être rigoureuse bien entendu, mais ces instruments possédaient l'incontestable avantage d'être des instruments conjoints, i.e., toujours présents. Dans certaines peuplades primitives, on rencontre des suites-modèles d'évaluation des multitudes constituées par une série déterminée des partie du corps. Si pareil système de numération est fort limité, il jouit, lui aussi, de cette présence constante à l'évaluateur. Cf. Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, P.U.F., 1947, p.10.

pluralités différentes constitue un nombre cardinal distinct. Et chaque nombre cardinal est représenté par un symbole différent qui n'est pas le nombre lui-même, mais le signe de ce nombre, le symbole de cette pluralité.

Revenons maintenant aux ensembles infinis. Il s'agit pour nous de trouver un moyen de les évaluer, en supposant que ce soit là une entreprise possible. Dans sa transposition du fini à l'infini, le procédé énumératif d'évaluation perd toute validité. Mais si le processus n'est plus entièrement applicable, l'un de ses éléments composants peut être retenu, à condition d'être adapté à la situation nouvelle. L'élément à retenir, c'est la correspondance bi-univoque qu'il faudra tenter d'établir entre deux ensembles infinis pour savoir s'ils ont même pluralité. Il est manifeste qu'on ne peut espérer réaliser cette correspondance en considérant les éléments un à un. Mais si l'on réussit à découvrir une loi simple permettant d'exprimer, *d'un seul coup*, la correspondance bi-univoque, le but sera atteint : ce faisant, on ramène le problème d'un niveau infini à un niveau fini où nous pouvons et savons nous mouvoir avec une relative aisance. Et si l'on réussit à bâtir cette correspondance bi-univoque, on conclura que les deux ensembles sont équivalents ; ils auront ainsi même pluralité, ils auront un même nombre cardinal, mais, cette fois, un nombre cardinal *transfini*. Si l'on ne parvient pas à établir la correspondance requise, on conclura alors à la non-équivalence des deux ensembles, à leur différence de pluralité ; ils auront des nombres transfinis différents. À chaque nombre transfini différent, on attachera un symbole distinctif tout comme on le fait pour les ensembles finis.

Introduisons maintenant le symbolisme approprié aux nombres transfinis. Nous nous donnons deux ensembles infinis M et N. Si l'on peut découvrir une correspondance bi-univoque entre eux, nous les dirons équivalents et nous écrirons $M \sim N$. Au point où nous en sommes, nous n'avons encore en notre possession aucun nombre transfini individuel. Nous désirerions pourtant, en supposant qu'il en existe, dénoter par quelque signe le nombre transfini d'un ensemble infini. Dès à présent nous pouvons le faire, mais la valeur déterminée de ce nombre nous restera inconnue à la manière des quantités algébriques représentées par des symboles littéraux. Une façon tout à fait appropriée de désigner symboliquement ce nombre transfini, c'est de procéder de la façon suivante. Soit un ensemble M. Nous signifierons son nombre cardinal par la même lettre M, mais surmontée de deux traits horizontaux qu'on pourrait interpréter comme indiquant la double abstraction de la nature et de l'ordre des éléments de l'ensemble dont le nombre cardinal représente la pluralité. Si donc nous avons deux ensembles M et N qui sont équivalents, nous pouvons tirer cette conséquence :

$$M \sim N \dashrightarrow \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$$

En d'autres termes, l'équivalence entre deux ensembles entraîne l'égalité des nombres cardinaux qui mesurent leurs pluralités. Qu'on se garde bien, ici, d'une méprise possible, Nous avons déjà noté que si l'égalité de deux ensembles entraîne leur équivalence, celle-ci en revanche n'entraîne pas l'égalité des deux ensembles, mais elle entraîne l'égalité des nombres cardinaux qui expriment et mesurent leur pluralité. En outre, tout ce qu'on peut conclure à partir de l'égalité de deux nombres cardinaux transfinis ou finis, c'est à l'équivalence des ensembles qu'ils mesurent, nullement à leur égalité.

Notre propos n'exige pas que nous connaissions les nombres transfinis pris individuellement. Il paraît pourtant difficile de n'en rien dire. Nous avons déjà appris que le nombre transfini constitue une extension du nombre cardinal fini. Nous savons également qu'on ne passe pas continûment du nombre fini au nombre transfini : ce n'est pas en prolongeant toujours la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ... n, ..., en y ajoutant des nombres de plus en plus grands qu'on atteindra les nombres transfinis ; il faut s'installer abruptement et d'un seul bond dans l'infini. Nous ne savons pas, pour l'instant, combien il y aura de nombres transfinis, ni même s'il y en aura un seul. S'il en existe, il faudra qu'il y en ait au moins un. S'il n'y en a pas d'autre, cet unique nombre transfini sera à la fois le plus petit et le plus grand. S'il y en a plus qu'un, il y en aura un qui sera plus petit que les autres et il servira à mesurer ces derniers : ce sera, pour ainsi dire, l'un transfini, analogue à l'un du domaine fini. Arrêtons-nous donc un peu à ce nombre transfini, unique ou premier.

Sur quoi l'existence de ce nombre transfini pourra-t-elle s'établir ? Le nombre cardinal, qu'il soit fini ou qu'il soit transfini, exprime la pluralité d'un ensemble, fini ou infini. Le premier nombre transfini devra donc se rattacher à un ensemble infini. Or existe-t-il des ensembles infinis ? S'il fallait rattacher les nombres transfinis à l'existence de multitudes ou collections infinies actuelles, le mathématicien serait dans une impasse. Nous ne savons pas en effet s'il existe effectivement des multitudes infinies en acte. Et même s'il en existe, comment pourrions-nous en être sûrs ? Un des plus farouches partisans et défenseurs de la théorie cantorienne, le professeur Abraham E. Fraenkel, de l'université de Jérusalem, reconnaît sans ambages que l'univers physique, dans l'état actuel de nos connaissances, ne nous fournit aucun exemple de pareils ensembles.

> As a matter of fact, the recent research in physics has in increasing measure convinced us that the exploration of nature cannot lead to either infinitely large or infinitely small magnitudes. The assumption of a finite extent of the physical space, as well as the assumption of an only finite divisibility of matter and energy (so small that the smallest particles of matter and energy are finite), completely harmonize with experience. It thus seems that the external world can afford us nothing but finite sets.[1]

1. Fraenkel, *Abstract Set . . .*, p.9.

C'est le domaine des nombres qui fournira la pièce justificative du premier nombre cardinal transfini. Nous sommes familiers avec les nombres naturels ou entiers positifs : ils forment une suite ordonnée par valeurs croissantes. Cette suite possède un tout premier terme, mais on ne peut lui en assigner un dernier : c'est une suite ouverte, sans bornes, illimitée, infinie. C'est à cet ensemble que Cantor va attacher le premier nombre transfini ; c'est cet ensemble pris dans sa totalité, qu'il considère comme la première pluralité infinie. Et pour représenter et symboliser cette pluralité, ce nombre, on utilise habituellement, à l'instar de Cantor lui-même,[1] la première lettre de l'alphabet hébraïque et zéro : $\aleph_0$, c'est-à-dire *aleph-zéro*. Ajoutons qu'on connaît un second nombre transfini : il correspond à la pluralité des nombres réels et c'est *aleph* $\aleph$. On ignore s'il existe un ou plusieurs nombres transfinis entre *aleph-zéro* et *aleph*, mais on soutient qu'il existe une infinité de nombres transfinis supérieurs à *aleph*.

Les données précédentes sur la théorie des ensembles et sur l'arithmétique transfinie paraissent être, à première vue, tout ce qu'il y a de plus inoffensif et de moins compromettant. Elles ont pourtant conduit Cantor et les cantoriens à des développements inattendus et à des conclusions paradoxales. Elles les ont amenés à formuler des énoncés qui ont surpris et choqué parce qu'ils heurtaient violemment des conceptions familières, parce qu'ils renversaient des positions tenues jusque-là pour inattaquables et inébranlables. Comme il fallait s'y attendre, la nouvelle théorie de Cantor sema la confusion et le trouble dans les esprits, elle engendra un profond malaise aussi bien dans le monde des mathématiciens qu'en dehors de lui. Beaucoup s'opposèrent aux nouvelles théories, certains en devinrent des adversaires acharnés et irréconciliables. Mais la plupart des mathématiciens, même ceux qui offrirent d'abord quelque résistance, finirent par se rallier aux idées nouvelles.

Il serait fort intéressant d'exposer et d'analyser les points controversés auxquels a donné naissance l'arithmétique transfinie, mais pareille entreprise déborde largement le cadre très limité que nous avons fixé à notre étude.[2] Nous ne voudrions toutefois pas la terminer sans mentionner au moins les difficultés principales que soulève la théorie de Cantor et qui lui ont attiré des oppositions parfois virulentes. Ces difficultés regardent deux problèmes fondamentaux auxquels correspondent deux énoncés aussi vieux que célèbres. Ces deux problèmes sont, d'une part, celui de l'infini en puissance et de l'infini en acte, et, d'autre part, celui de tout et de la partie. Ils s'expriment dans les deux énoncés connus de tous : *Infinitum actu non datur* et *Omne totum majus est sua parte.*

Louis-Émile BLANCHET.

1. CANTOR, *Contribution to the Founding . . .*, p.104.

2. Nous avons déjà examiné ces épineuses questions dans un article du *Laval théologique et philosophique* (vol.XXII, 1966, n.1). Nous y renvoyons le lecteur intéressé.