Cahiers québécois de démographie

Petrioli, Luciano et Andrea Menchiari. *Model Fertility Tables*. Sienne (Italie), Facoltà di Scienze Economiche E Bancarie, Istituto di Statistica, Università di Siena, 1986, 241 pages.

Normand Thibault

Volume 19, numéro 1, printemps 1990

Diversité de la population québécoise

URI : https://id.erudit.org/iderudit/010042ar
DOI : https://doi.org/10.7202/010042ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Association des démographes du Québec

ISSN

0380-1721 (imprimé)
1705-1495 (numérique)

Découvrir la revue

PETRIOLI, Luciano et Andrea MENCHIARI. — *Model Fertility Tables*. Sienne (Italie), Facolta di Scienze Economiche E Bancarie, Istituto di Statistica, Universita di Siena, 1986, 241 pages.

Ce document s'inscrit dans une série de travaux réalisés par Petrioli sur l'utilisation de la fonction de Gompertz dans l'analyse de la fécondité ainsi que dans le cadre plus général des nombreuses études sur la modélisation des phénomènes démographiques. Les modèles théoriques suscitent toujours beaucoup d'intérêt en démographie. Ils sont indispensables dans les nombreuses applications caractérisées par des données manquantes, incomplètes ou imparfaites. Ces conditions ne sont pas l'apanage de pays caractérisés par des statistiques déficientes, on les retrouve presque quotidiennement. Pensons au cas simple, aussi présenté par Petrioli, où l'on désire obtenir la descendance finale d'une génération de femmes n'ayant pas encore terminé leur période de vie féconde, ou encore pensons au cas des projections démographiques où l'on extrapole des indices synthétiques de fécondité qu'il faut ensuite éclater en taux par âge afin d'obtenir le nombre annuel de naissances.

En ce qui concerne la fécondité, les recherches ont permis d'isoler depuis longtemps un bon nombre de fonctions mathématiques performantes, pouvant être paramétrisées assez simplement et présentant un biais positif convenable, c'est-à-dire caractérisées par une courbe de densité légèrement décalée vers la droite. Les fonctions Bêta, ou type I de Pearson, et Gamma, ou type III de Pearson, sont parmi les plus simples et les plus connues lorsqu'il s'agit de générer l'ensemble des taux de fécondité par année d'âge des femmes. La fonction de Gompertz, déjà utilisée depuis longtemps en mortalité, aurait été introduite dans l'analyse de la fécondité au milieu des années 1960 à peu près simultanément par G. Wunsch (1966) et par P. Martin (1967), ainsi que peu de temps après par A. Romaniuk et S. M. Tanny (1969). Les applications des années 1970 et 1980 sont toutefois orientées du côté des modèles relationnels plutôt que de celui de la simulation de la fécondité sur l'ensemble des années d'âge.

Le document de Petrioli et Menchiari est divisé en quatre parties. La première est une entrée en matière qui situe la fonction choisie à partir des bases des méthodes relationnelles : la distribution D1 de fécondité (c'est-à-dire la courbe de la descendance atteinte selon l'âge) dont on ne connaît pas le début ou la fin peut être reconstituée par une relation linéaire avec la distribution D2 qu'on connaît mieux. Ce à quoi la fonction de Gompertz se prête très bien mathématiquement. Il y a des exemples pratiques, et le tableau 1 donne quelques équations des relations offertes par la distribution de Gompertz et par deux de ses cousines : Frechet et Weibull.

La deuxième partie présente la vaste base empirique de l'étude. Un éventail de 1490 fécondités observées dans quelque 114 pays ou groupes ethniques, au cours des années 1936 à 1978, et avec quelques cas en 1979 et 1980.

La troisième partie est hétéroclite, elle couvre à la fois la présentation du modèle théorique offert par la fonction de Gompertz, l'analyse des 1490 distributions de fécondité observées, le choix des paramètres et leur fourchette pour construire les tables types de fécondité, et finalement les explications usuelles pour entrer dans les tables.

La quatrième partie contient les annexes et, entre autres choses, 190 pages de tables types de fécondité : les taux par année d'âge, les taux par groupe d'âge ainsi que onze paramètres permettant d'y entrer de plusieurs façons. Un premier ensemble de tables couvre 2160 fécondités situées entre 1,1 et 8,1 enfants par femme, avec un éventail de paramètres moyens tirés des régressions mathématiques réalisées sur les 1490 cas réels recensés dans la seconde partie du document. Pour chaque niveau de fécondité (ISF), il y a trois formes de calendrier proposées : plutôt étalée, plutôt concentrée autour de l'âge modal et plutôt moyenne. Pour chacune de ces trois formes, on choisit un âge modal parmi les 15 proposés, entre 23 ans et 30 ans. Le deuxième ensemble de tables types reconstitue 1380 formes différentes de fécondité, toutes normalisées à 1,0 enfant par femme. Il y a 30 choix pour l'âge modal, de 23,00 ans à 30,25 ans par bonds de 0,25 an, et 46 choix pour le degré de concentration du calendrier représenté par le taux de fécondité à l'âge modal, de 0,030 à 0,120 par bonds de 0,002. Dans ces tables normalisées, il suffit alors de multiplier le calendrier de la table choisie par la descendance finale désirée pour obtenir les taux de fécondité.

Quelle est l'équation de la fonction de Gompertz ?

$$D(x) = \alpha \bullet \beta^{\delta^{(x-x_o)}}$$

et $$f(x) = \alpha \bullet \ln(\beta) \bullet \ln(\delta) \bullet \delta^{(x-x_o)} \bullet \beta^{\delta^{(x-x_o)}}$$

où : D(x) est la descendance atteinte à l'âge x

f(x) est le taux de fécondité à l'âge x

α est relié à la descendance finale;

β est relié à la proportion de la descendance qui est atteinte à l'âge arbitraire x_o (24 ans, dans le texte);

δ est relié à la variance.

L'apport novateur de Petrioli et Menchiari réside à la fois dans l'utilisation d'un processus itératif pour obtenir l'équivalent d'une reparamétrisation de la fonction de Gompertz, et dans la construction de tables types de fécondité qu'ils proposent en remplacement de celles élaborées par Coale et Trussell en 1974. Les paramètres développés sont : la descendance finale, l'âge modal et le taux de fécondité à cet âge. Pour les deux premiers, il n'y a guère de problème, mais pour le troisième, l'objection majeure est que si l'on connaît ce taux de fécondité à l'âge modal, alors ne connaît-on pas aussi tous les autres taux ? Les auteurs y ont vu : des «graphiques» permettent de transformer l'âge modal et son taux ou bien en âge moyen et variance, ou bien en paramètres de parité relative. D'une façon simple, ces parités expriment la descendance générée par les femmes de (x,x+4) ans divisée par celle générée par les femmes de (x+5,x+9) ans. Il y a en a deux : 15-19/20-24 et 20-24/25-29.

Que penser de la fonction de Gompertz ? La réponse des auteurs n'est pas claire. La performance de leur modèle est comparée avec succès à celle des tables types bien connues de Coale et Trussell, mais Petrioli et Menchiari ne vont pas plus loin. Il n'y a pas de comparaison avec la performance des autres fonctions usuelles; c'est une lacune, car elles, aussi, donnent normalement de meilleurs résultats que les tables de Coale et Trussell. Les premières applications des années 1960, citées plus haut, ayant donné des résultats plutôt moyens dans l'estimation de la descendance finale, il faut croire que le contrôle vigoureux exercé par l'âge modal et son taux amène de bonnes simulations. Les quelques tests que j'ai réalisés avec quatre fécondités québécoises (ISF de 4,0 en 1958, de 2,1 en 1970, de 1,8 en 1976 et de 1,4 en 1986) sont positifs. La performance est équivalente à celle obtenue avec la fonction Gamma (descendance finale, âge moyen à l'accouchement et variance), mais aussi à celle qu'on obtient en appliquant tout simplement ces ISF au calendrier observé huit années avant ou après celui-ci.

Pour ceux qui trouvent les tables types généralement lourdes à manipuler et pas très flexibles dans des utilisations à grand volume ou dans des applications informatiques, il y a l'annexe C. Un petit programme clair, écrit en BASIC et aisément adaptable, transforme les trois paramètres d'entrée (la descendance, l'âge modal et son taux) en solutionnant l'équation de Gompertz par des itérations, et imprime des résultats complets.

L'ouvrage est intéressant au point de vue scientifique, mais il n'est pas parfait. On ne fait pas le tour de la fonction de Gompertz, on ne dit pas pourquoi il faut passer par le mode et le taux maximum plutôt que par le mode et la variance, ou par la moyenne et la variance. On passe sous silence les autres fonctions usuelles. Les graphiques de conversion sont construits sur une base empirique plutôt que mathématique. On n'explique pas pourquoi le système de relations doit être changé lorsque l'ISF est inférieur à 1,7 enfant par femme. Le document date de 1986 mais la base empirique ne tient pas compte des données récentes, 1979 et après, qui auraient peut-être permis de mieux cerner ces faibles fécondités.

J'ai des réserves sur certains résultats trop facilement présentés. La plus importante porte sur l'âge modal et le taux de fécondité maximum issus des 1490 fécondités observées, sur lesquels sont basées toutes les relations subséquentes construites par Petrioli et Menchiari. Les chiffres sont obtenus en ajustant la fonction $k \cdot z^a \cdot (55-z)^b$, du type VI de Pearson, sur seulement trois taux de fécondité : ceux à 15-19 ans, 20-24 ans, 25-29 ans si la plus grande valeur est à 20-24 ans, ou ceux à 20-24 ans, 25-29 ans et 30-34 ans si elle est à 25-29 ans. Les réponses sont effectivement des approximations valables dans certaines circonstances, mais pas au point qu'on les publie, sans avertissement, avec une précision de trois décimales pour l'âge modal et de cinq décimales pour le taux. Prenons comme exemple les données de la France en 1970, à la page 74 du texte : les quatre taux entre 15-19 ans et 30-34 ans sont 0,0265, 0,1574, 0,1574 et 0,0930. Si l'on retient 20-24 ans comme groupe d'âge pivot, le taux maximum est de 0,19353 à 24,986 ans, tandis que si l'on retient 25-29 ans, il est de 0,16805. Les données réelles, par année d'âge, montrent un maximum de 0,185 à 24 ans en âge atteint au cours de l'année 1970. J'ai relevé d'autres types de cas aberrants, dont ceux où le taux maximum est strictement égal au taux du groupe d'âge. Le texte n'explique pas le choix de la fonction, ce qui n'est pas grave; mais il ne présente aucun test de comparaison entre les valeurs interpolées et celles tirées des taux par année d'âge pour en évaluer les biais et aléas.

Attention aux paramètres de régression du tableau 9, qui permettent en théorie d'estimer tous les taux de fécondité par groupe d'âge si l'on connaît seulement l'ISF et l'âge modal. Ils produisent souvent des valeurs négatives à 15-19 ans, 40-44 ans et 45-49 ans si l'ISF est inférieur à 3 enfants par femme, et même à 35-39 ans avec un ISF de 1,5.

Je n'ai pas compris pourquoi, dans la première série de tables types, les valeurs entières des ISF 1, 5, 6, 7 et 8 sont omises alors que les valeurs fractionnaires sont là, comme par exemple 5,9 et 6,1, mais pas 6,0. Le petit programme BASIC fonctionne seulement si l'on connaît le mode et le taux maximum. Tant qu'à y être, on aurait pu y inclure facilement des portes d'entrée facultatives avec la moyenne et la variance, avec le mode et la variance et avec les paramètres de parité. Dans les deux premiers cas, les équations sont plus simples que celles avec le mode et le taux à l'âge modal, elles ne requièrent pas de processus d'ajustement par itérations successives, et cette inclusion nous aurait tout au moins évité de passer par les fameux graphiques de conversion.

La qualité physique de mon exemplaire laissait à désirer; ce n'est pas invitant pour un document qui se veut de référence. Les pages 61 à 90 sont reliées à rebours. La qualité de la reprographie est moyenne : plusieurs indices et exposants doivent être devinés de même que certains taux de fécondité donnés dans les tables types en annexe. La première lecture s'est terminée avec huit feuilles volantes.

Normand THIBAULT

Références bibliographiques

COALE, A. J. et T. J. TRUSSELL, 1974. «Model Fertility Schedules: Variations in the Age Structure of Childbearing in Human Populations». *Population Index*, 40, 2, 185-258.

MARTIN, P., 1967. «Une application des fonctions de Gompertz à l'étude de la fécondité d'une cohorte». *Population*, 22, 6, 1085-1096.

ROMANIUK, A. et S. M. TANNY, 1969. *Projection of Incomplete Cohort Fertility for Canada by Means of the Gompertz Fonction.* Analytical and Technical Memorandum, No. 1, Census Division, Dominion Bureau of Statistics, Ottawa, Canada.

WUNSCH, G., 1966. «Courbes de Gompertz et perspectives de fécondité». *Recherches économiques de Louvain*, 32, 457-468.

***