L'Actualité économique

Sur trois contributions d'Allais

Camille Bronsard et Lise Salvas-Bronsard

Volume 64, numéro 4, décembre 1988

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601464ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601464ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Bronsard, C. & Salvas-Bronsard, L. (1988). Sur trois contributions d'Allais. *L'Actualité économique*, *64*(4), 481–492. https://doi.org/10.7202/601464ar

Résumé de l'article

Dans ce texte, nous avons choisi de souligner trois contributions de Maurice Allais qui ont le mérite de ne pas le confiner dans un rôle de précurseur. Nous examinons successivement la dynamique microéconomique d'Allais (elle est toujours révolutionnaire), sa caractérisation de la substitution et de la complémentarité (elle est toujours originale) et enfin les liens qu'il y a entre sa généralisation de la théorie du rendement social au cas du risque et la généralisation d'Arrow-Debreu (ces deux théories sont parfaitement complémentaires).

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 64, n° 4, décembre 1988

SUR TROIS CONTRIBUTIONS D'ALLAIS*

Camille BRONSARD
et
Lise SALVAS-BRONSARD
*Université de Montréal***

RÉSUMÉ. — Dans ce texte, nous avons choisi de souligner trois contributions de Maurice Allais qui ont le mérite de ne pas le confiner dans un rôle de précurseur. Nous examinons successivement la dynamique microéconomique d'Allais (elle est toujours révolutionnaire), sa caractérisation de la substitution et de la complémentarité (elle est toujours originale) et enfin les liens qu'il y a entre sa généralisation de la théorie du rendement social au cas du risque et la généralisation d'Arrow-Debreu (ces deux théories sont parfaitement complémentaires).

ABSTRACT. — This paper contains a discussion on three contributions done by Maurice Allais which are largely unknow. We present his conception on microeconomic dynamics (it is still revolutionary), his characterization of substitution and complementarity (it is still original) and finally, the links between his extension of welfare economics to risk and uncertainty and the Arrow's extension (both theories are complementary).

INTRODUCTION

Au début des années cinquante, Maurice Allais a écrit une série d'exemples numériques montrant que l'axiomatique de von Neumann-Morgenstern et celle de Savage étaient beaucoup plus restrictives qu'on ne le croyait à l'époque. Ces exemples numériques forment ce que l'on appelle « Le paradoxe d'Allais » et que l'on retrouve dans tout bon manuel d'introduction à la théorie des jeux et à la théorie de l'incertitude. En revanche, on ne sait à peu près rien sur le reste de son œuvre. Or, cette œuvre s'étend sur près de cinquante ans *et est tout aussi paradoxale* (si par là on veut entendre « contraire à l'opinion communément admise », surprenante). De plus, les autres paradoxes qu'elle contient, tout comme celui mentionné plus haut, n'ont rien perdu de leur fécondité. Nous voudrions, ici, attirer l'attention sur quelques-uns. Accessoirement, cela fera comprendre pourquoi une vie scientifique « qui a été une série d'échecs » (au dire d'Allais) peut « converger » sur un prix Nobel.

* Les auteurs remercient G. Dionne, P. Fortin et M. Moreaux pour les discussions qu'ils ont eues avec eux sur les thèmes de ce texte. Cette étude a été réalisée grâce à des subventions du CRSH et du fonds FCAR.

**Département d'économique.

1. UNE VISION DYNAMIQUE DE L'ÉCONOMIE (LE PARADOXE DOCTRINAL)

Maurice Allais est un conservateur (un libéral comme on dit en France) et, sur ce plan, il est au moins aussi combatif qu'un Friedmann. Pourtant, il ne croit pas en la concurrence parfaite, refuse toute apologie du monde réel; il est, de fait, interventionniste. Une raison pour cela, c'est qu'à la différence de la plupart des économistes, le système d'équations par lequel il se représente le réel n'est pas statique mais dynamique. C'est un système d'équations différentielles... qui ne converge pas tout à fait sur un optimum de Pareto. Sa richesse est telle qu'il peut tout aussi bien expliquer la dispersion observée des prix (qu'elle vienne de « frottements » ou de coalitions monopolistiques) et l'existence de marchés noirs que la nature véritable de l'hypothèse des anticipations rationnelles. Nous allons le présenter, puis le situer dans l'œuvre d'Allais et dans le reste de la littérature.

Soit W^* une fonction d'utilité de Bergson[1], c'est-à-dire une fonction respectant les préférences individuelles et les transformant en « niveau de vie collectif ». On écrit

$$W = W^*(u_1(x_1), \ldots, u_i(x_i), \ldots, u_m(x_m)) \tag{1}$$

où u_i est une fonction d'utilité représentant les préférences de l'agent i et x_i le vecteur des consommations (biens et services, inputs positifs, outputs négatifs) de cet agent. Supposons W^* et chaque u_i continûment dérivables. Soit w un vecteur de poids. Les prix personnels d'un agent i peuvent s'écrire

$$p_i = s\,\frac{\partial u_i/\partial x_i}{w\partial u_i/\partial x_i} \tag{2}$$

Ce sont ses « propensions marginales à payer » exprimées dans l'unité de compte arbitraire s, qu'on suppose la même pour chacun. On se ramène au cas usuel des taux marginaux de substitution en posant que toutes les composantes de w sont nulles sauf la dernière qui est l'unité. Le dernier bien est alors le numéraire. Quoi qu'il en soit, posons $1/\alpha_i = \dfrac{s}{w\partial u_i/\partial x_i}$ et $\lambda_i = \partial W^*/\partial u_i$. La différentielle première de (1) peut s'écrire

$$dW = \sum_i \alpha_i \lambda_i p_i dx_i \tag{3}$$

et, en supposant

$$\alpha_i \lambda_i = \theta, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

$$\frac{dW}{\theta} = \sum_i p_i dx_i \tag{5}$$

1. Cette hypothèse n'est pas nécessaire, comme on le verra par la suite, et ne suit pas la présentation d'Allais. D'une manière générale, nous allons couper au plus court pour arriver à un résultat donné.

Supposons que (1) soit définie pour le cas d'une économie sans production. Alors tous les biens sont positifs et leur consommation ne peut excéder les ressources initiales de l'économie. On écrit

$$\sum_i x_i \leq \omega \quad x_i \geq 0 \tag{6}$$

Puisque $\sum_i x_i = \omega$ est possible,

$$\sum_i dx_i = 0 \tag{7}$$

l'est aussi.

Définissons alors la moyenne des prix personnels. On a

$$\bar{p} = \frac{1}{m}\sum_i p_i \tag{8}$$

et, par suite, $\bar{p} \sum_i dx_i = 0$. Retranchant cette dernière relation de (5), on a

$$\frac{dW}{\theta} = \sum_i [p_i - \bar{p}]dx_i \tag{9}$$

A l'optimum, $p_i = \bar{p}$. En dehors de l'optimum, il y a toujours moyen d'augmenter le niveau de vie collectif. En effet, posons

$$dx_i = \hat{a}[p_i - \bar{p}] \tag{10}$$

où $\hat{a}$ est une matrice diagonale positive. Alors (9) peut s'écrire

$$\frac{dW}{\theta} = \sum_i [p_i - \bar{p}]\hat{a}[p_i - \bar{p}] \tag{11}$$

et cette forme quadratique est positive définie. De plus, cette propriété de monotonicité suggère fortement qu'une procédure d'ajustement définie par (10) conduira à un optimum de Pareto.

Considérons en effet (10) comme un concept « primitif », c'est-à-dire posé directement et indépendamment de (1). Ce système dynamique est quasi-stable s'il admet une fonction de Liapounoff, c'est-à-dire une fonction continue, positive, bornée inférieurement et décroissante. Or, $W^0 - W^*(\cdot)$ où W^0 est un maximum, est continue puisque W^* l'est, évidemment positive, bornée inférieurement puisque W^* est définie sur un compact et décroissante puisque la procédure de (10) rend W^* croissante par (11). Par ailleurs, faisant la somme sur i en (10), on a $\sum_i dx_i = 0$. La trajectoire des x_i reste donc dans le compact défini en (6). Alors, parce que la procédure d'ajustement (10) est quasi-stable, elle nous approche de l'ensemble des points de repos $p_i = \bar{p}$ (égalité des TMS) sans nécessairement converger sur un point particulier (on tend vers la courbe des contrats d'une boîte d'Edgeworth sans pour autant tendre vers le point de concurrence parfaite [2]). Une autre façon de voir les choses est de considérer l'image de (6) par le vecteur des u_i. Cette image est compacte. Donnons à (10), la forme

$$dx_i = \theta\, \hat{\bar{p}}^{-1}\ \hat{w}[p_i - \bar{p}_i] \tag{12}$$

où $\hat{w}$ est la matrice diagonale que l'on peut former à l'aide des poids w, $\hat{\bar{p}}_{-1}$ l'inverse de $\hat{\bar{p}}$ formée comme $\hat{w}$ et θ un scalaire positif. Si on prémultiplie (12) par $\bar{p}$, on aura

$$\bar{p}\ dx_i = 0 \qquad (13).$$

Si on prémultiplie par $[p_i - \bar{p}]$, on aura

$$[p_i - \bar{p}]dx_i \geq 0$$

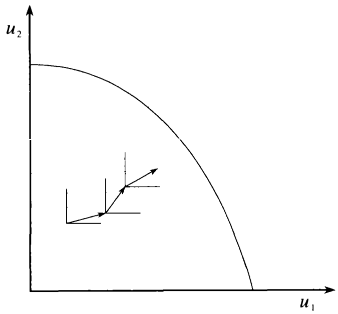
et donc

$$du_i = \alpha_i p_i dx_i \geq 0 \qquad (14).$$

Autrement dit, la procédure (10) peut se spécifier de manière que l'utilité de chacun augmente à chaque étape de la procédure. On peut donc la reporter dans l'image de (6) par les u_i pour voir la convergence vers la frontière de Pareto.

FIGURE I

CHEMINEMENT VERS UN OPTIMUM



Ce n'est pas tout. Dénotons dx_{ij} la variation du vecteur x_i provenant des seuls échanges avec un autre agent j. Posons

$$dx_{ij} = (\hat{a}/m)[p_i - p_i] \tag{15}$$

et faisons la somme sur j. Le résultat n'est rien d'autre que (10) [3].

On peut donc concevoir la dynamique d'une économie comme suit : il existe des propensions marginales à échanger entre tout couple d'agents pour tout couple de biens; les échanges effectifs dépendent de ces propensions et sont gouvernés par des équations du type (15) qui, par nature, sont décentralisées; si l'information est gratuite et si chacun participe à l'échange, (15) conduit aux mêmes résultats que (10) que l'on peut tenir pour une procédure centralisée. Ainsi

2. Remarquons en effet que $\bar{p}$ change à chaque itération.

3. Plutôt que de regrouper les agents deux à deux, on peut ici imaginer toute forme de coalition. Ceci permet un passage direct à la théorie du noyau. Voir Malinvaud (1982), particulièrement le paragraphe sur les allocations stables.

conçus, les échanges n'ont rien à voir avec la concurrence parfaite (ils se font hors équilibre). Par ailleurs, il n'y a aucune raison d'introduire l'unicité des prix en dehors de l'équilibre.

Cette façon de voir l'économie est de Maurice Allais (1943, page 640, numéro 270). C'est ce qu'on a appelé par la suite une procédure de non-tâtonnement (quand on ajoutait sans raison un système de prix unique quelque part) et une procédure MDP (surtout quand on l'appliquait aux biens publics). Les défenseurs d'Allais (1986) font dater cette découverte de 1967. En 1967, Allais n'a fait que « dramatiser » sa découverte de 1943 (il a réalisé, ayant également défini une procédure de tâtonnement en 1943 — ce qui au moins fut relevé par Negishi (1962) — que sa deuxième procédure était remarquablement plus riche).

Enfin, Allais n'a jamais cru que l'on puisse atteindre la frontière de Pareto (au fait, c'est encore lui, en 1943, qui a défini — et dessiné — ce concept que l'on attribue à Samuelson (1950)). Il reste au moins une perte « de second ordre ». Que la perte soit de second ordre est peu évident, mais qu'il y ait une perte est suffisant pour expliquer la présence d'à peu près toutes les distorsions usuellement observées. Notons enfin que si on interprète (10) *à travers le temps* on obtient la définition de Fisher (1983) des anticipations rationnelles : c'est une situation où les arbitrages sont épuisés.

Ayant noté que pour Allais les équations (15) et (10) prenaient un sens positif, c'est-à-dire pouvaient représenter l'évolution de l'économie réelle, nous pouvons maintenant replacer cette procédure d'Allais dans l'ensemble de la littérature.

Les équations (10) (ou du moins diverses variantes) sont bien connues : elles caractérisent une procédure de planification par objectifs quantitatifs (voir Malinvaud (1983), ch. 8). Elles ont conduit à des développements mathématiques passablement raffinés et à une certaine solution du problème de l'allocation des biens publics (voir Champsaur, Drèze et Henry (1977)). Pour ce qui est de l'utilisation de procédures semblables pour représenter l'évolution d'une économie, on pourra consulter F.M. Fisher (1983) — mais nous ne garantissons nullement que la conception de Fisher ait l'ampleur de celle d'Allais ou qu'elle puisse se réduire au dual d'une procédure d'Allais. Enfin, ces procédures peuvent se réinterpréter même pour définir ce que peut être une politique macroéconomique optimale (voir Bronsard et Salvas-Bronsard (1987)).

2. LA MATRICE D'ALLAIS

La section précédente exemplifie l'ampleur des conceptions d'Allais. Nous allons maintenant montrer qu'il est tout aussi créatif dans le détail de l'analyse. Pour cela nous allons étudier la caractérisation par Allais des substituts et des compléments.

Rappelons l'histoire officielle. Au début du siècle, deux biens (h et k) sont compléments si $\partial^2 u/\partial x_h \partial x_k > 0$, c'est-à-dire, par exemple, si l'utilité marginale du café croît avec la quantité de sucre qu'on y ajoute (en un point). Cela est intuitif mais le signe considéré n'est pas indépendant d'une transformation monotone (positive) de l'utilité. Le critère n'est donc pas une pure caractéristique des préférences: il faut faire acte de cardinalisme pour l'accepter. En 1934, Hicks et Allen le remplacent par un critère fondé sur les signes des éléments hors-diagonaux de la matrice d'Antonelli. Ceci préserve l'intuition cardinaliste mais dépend du choix du numéraire. En 1946, Hicks propose d'utiliser les éléments de la matrice de Slutsky. Mais alors, en un sens, on n'a pas vraiment une caractéristique des préférences puisque celles-ci sont contraintes par un phénomène institutionnel, la contrainte budgétaire (si le monde se réduit à deux biens, table et chaise, ils sont substituts). Samuelson (1947) propose donc l'abandon pur et simple de la distinction entre substituts et compléments. La profession refuse de le suivre : cette distinction est trop importante — ce n'est pas la même chose d'avoir le monopole d'un bien pour lequel existent des substituts ou celui d'un bien pour lequel existent des compléments. D'autres critères sont donc proposés. Samuelson les revoit en 1974 (pour célébrer le 40$^{\text{ième}}$ anniversaire du Hicks-Allen) et maintient son rejet. La profession (dans une quasi-unanimité) continue d'utiliser le critère de Hicks (1946). Dans tout cela (sauf quelques exceptions dont il sera fait état plus loin), pas un mot sur Allais, c'est-à-dire sur son critère de 1943. Or celui-ci est vraiment une caractéristique des préférences, ne souffre pas des desiderata mentionnés plus haut et ouvre la porte à diverses généralisations.

Conservant le principe des notations antérieures (mais supprimant l'indice i), on appellera matrice d'Allais la matrice

$$A = \frac{wu_x}{s}\left[\ \hat{u}_x^{-1}U\hat{u}_x^{-1} - \frac{\zeta_1 U \zeta_2}{(\zeta_1 u_x)(\zeta_2 u_x)}\, ee'\ \right] \tag{1}$$

où wu_x est la somme pondérée des utilités marginales, s la grandeur de l'unité de compte, $\hat{u}_x^{-1}$ la matrice diagonale formée des inverses des utilités marginales, U la hessienne de u, ζ_1 et ζ_2 deux vecteurs tels que $\zeta_1 u_x \neq 0$ et $\zeta_2 u_x \neq 0$, e un vecteur composé d'unités. Autrement dit, on a

$$A_{hk} = \frac{wu_x}{s}\left[\frac{U_{hk}}{u_h u_k} - \frac{\zeta_1 U \zeta_2}{(\zeta_1 u_x)(\zeta_2 u_x)}\right] \tag{1'}$$

et si ζ_1 et ζ_2 sont choisis de manière appropriée,

$$A_{hk} = \frac{wu_x}{s}\left[\frac{U_{hk}}{u_h u_k} - \frac{U_{\alpha\beta}}{u_\alpha u_\beta}\right] \tag{1'}$$

où (α,β) définissent un couple-repère (formulation orginale d'Allais). Deux biens sont complémentaires au sens d'Allais si $A_{hk} > 0$. Prouvons que ce critère est une caractéristique des préférences.

Il s'agit de démontrer que : a) il est invariant sous une transformation monotone; b) il est intrinsèque, c'est-à-dire sans référence institutionnelle.

Preuve : Le second point étant évident, concentrons-nous sur le premier. Soit v une fonction d'utilité obtenue en transformant u par f. On a $v = f(u)$. Considérons alors

$$A^* = \frac{wv_x}{s}\left[\hat{v}_x^{-1} V \hat{v}_x^{-1} - \frac{\zeta_1 V \zeta_2}{(\zeta_1 v_x)(\zeta_2 v_x)}\, ee'\right] \tag{1}$$

Parce que $v = f(u)$, on a $v_x = f'u_x$, $V = f'U + f''u_x u_x'$ et $\hat{v}_x^{-1} = \hat{u}_x^{-1}/f'$. On a donc

$$\begin{aligned} A^* &= f'\,\frac{wu_x}{s}\left[\frac{\hat{u}_x^{-1}}{f'}(f'U + f''u_x u_x')\frac{\hat{u}_x^{-1}}{f'} - \zeta_1 \frac{(f'U + f''u_x u_x')}{(f'\zeta_1 u_x)(f'\zeta_2 u_x)}\,\zeta_2 ee'\right] \\ &= \frac{wu_x}{s}\left[\hat{u}_x^{-1} U \hat{u}_x^{-1} + \frac{f''}{f'}\, ee' - \frac{\zeta_1 U \zeta_2}{(\zeta_1 u_x)(\zeta_2 u_x)}\, ee' - \frac{f''}{f'}\, ee'\right] \\ &= A \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ce point étant acquis, demandons-nous comment justifier le critère d'Allais d'un point de vue intuitif. Il est alors extrêmement tentant, en considérant (1″), d'écrire que A_{hk} est positif si h et k dénotent plus de complémentarité entre eux que n'en démontre le couple-repère α et β. Fort bien, mais il s'agit là d'une interprétation cardinaliste qui suppose admissible le critère $\partial^2 u / \partial x_h \partial x_k > 0$. Allais est un cardinaliste, il propose cette interprétation. Barten (1971) (qui a retrouvé indépendamment le critère d'Allais à un scalaire positif près) accepte aussi cette interprétation. En fait, pour justifier le critère d'Allais, il faut caractériser d'une manière plus complète la matrice d'Allais et la comparer soit avec la matrice de Slutsky soit avec la matrice d'Antonelli.

(i) La matrice d'Allais est symétrique : $A = A'$. (Évident par (1)).

Il en sera de même de la forme paramétrisée :

$$A^P = \hat{p} A \hat{p} = \frac{U}{\alpha} - \zeta_1 \frac{U}{\alpha} \zeta_2 \frac{p\ p'}{\zeta_1 p\, \zeta_2 p} \tag{2}$$

où $\alpha = w'u_x/s$ et où p défini comme à la section précédente. Par ailleurs, pour tout vecteur ξ orthogonal à p on a $\xi A^P \xi = \xi(U/\alpha)\xi$. D'où :

(ii) La forme quadratique $\xi A^P \xi$ est définie négative sur la variété linéaire $p\xi = 0$ si la fonction u est fortement quasi-concave. (Ceci n'entraîne pas que A soit définie négative ou semi-définie négative).

(iii) La matrice A^P est une inverse généralisée d'une matrice de Slutsky. (En effet, soit K une matrice de Slutsky. On a $Kp = 0$ et, par (2), $KA^P K = K(U/\alpha)K$. Par la théorie usuelle du consommateur, $K(U/\alpha)K = K$).

Précisément parce que A^P est l'inverse généralisée de K, A peut s'utiliser pour caractériser la substitution et la complémentarité. *Elle n'implique cependant pas de biais vers la substitution.*

(iv) La matrice A^P peut se « projeter » en un effet-quantité sur les prix. (Considérons (2). En prémultipliant par $[I - p(w'/s)]$ on a $[I - p(w'/s)]A^P = [I - p(w'/s)]U/\alpha$ et ceci n'est rien d'autre que la dérivée de $p = su_x/wu_x$ par rapport à x).

On en déduit aussitôt que $[I-p(w'/s]A^P[I-w(p'/s)]$ est une matrice d'Antonelli. D'où encore la possibilité d'utiliser A^P ou A pour définir la substitution et la complémentarité. *Elle n'implique cependant pas de biais vers la complémentarité.*

Les propriétés précédentes font de la matrice d'Allais un instrument de première valeur, a priori, pour fins de microéconomie appliquée et d'économétrie appliquée. Or, à notre connaissance, la première utilisation économétrique est de Barten et Bettendorf (1988). Pour faire les liens entre Barten (1971) et ces derniers, on consultera Charette et Bronsard (1975) ainsi que Salvas-Bronsard et al. (1977). Pour une utilisation en théorie, on consultera Alarie et al. (1989). Enfin, pour d'autres caractérisations que celles proposées dans Alarie et al. et ici ... on retournera à Allais (1943).

3. MONNAIE ET INCERTITUDE (LE PARADOXE D'ARROW)

Comment faire pour introduire dans l'équilibre général à la fois la monnaie et *d'autres* actifs financiers ? Pour répondre à cette question, il est utile de reconsidérer le colloque de Paris (1952) dont les minutes ont été publiées en 1953 (*Économétrie*, CNRS, Paris). Les modèles d'Arrow et Allais s'y présentent comme des substituts imparfaits. Nous allons montrer ici qu'ils sont parfaitement complémentaires.

a) Le problème du consommateur s'écrit à l'aide de la fonction de Lagrange

$$L = S(x_0;x_1,\dots,x_e,\dots,x_E) - \lambda_0[p_0x_0 + \gamma A + \sum_e \gamma_e B_e - R_0] - \sum_e \lambda_e [p_e X_e - A - B_e - R_e] \tag{1}$$

où S est une fonction de satisfaction ;

x_0 le vecteur des consommations à la période initiale ;

x_e le vecteur des consommations à la seconde période si l'état du monde e se réalise;

p_0 et p_e sont les prix correspondants ;

A est un dépôt bancaire (un actif nominal certain) et γ le coefficient d'escompte correspondant ;

B_e est un montant d'actif financier incertain : son prix est γ_e, $\gamma_e B_e$ est payé de façon ferme mais B_e n'est livré à la seconde période que si l'état e se réalise ;

R_0 est le revenu de la période initiale et R_e le revenu à la seconde période si l'état du monde e se réalise ;

λ_0 et λ_e sont des multiplicateurs de Lagrange.

Concentrons-nous sur le rôle des valeurs boursières (et de la monnaie) pour la répartition la meilleure des risques. Autrement dit, contentons-nous de dériver par rapport à A et B_e. On a

$$\sum_e \lambda_e = \gamma\lambda_0 \tag{2}$$

$$\lambda_e = \gamma_e\lambda_0 \tag{3}$$

Ceci entraîne

$$\gamma = \sum_e \gamma_e \tag{4}$$

c'est-à-dire qu'un optimum (fini) n'est possible que si le coefficient d'escompte de la monnaie est égal à la somme des prix des actifs financiers incertains. Autrement dit, la configuration des prix doit être telle qu'il soit équivalent d'acheter une unité de monnaie ou une unité de *chaque* actif financier incertain. D'un côté, la monnaie est donc utile puisqu'elle permet de se couvrir contre chaque état du monde. De l'autre côté, elle est inutile puisque la diversité des actifs financiers permet la même chose « au même prix ». C'est le paradoxe d'Arrow.

b) Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'on aura ce résultat *quelle que soit la spécification de S.* Autrement dit, $S(\cdot)$ peut représenter l'espérance mathématique $\sum_e \pi_e u(x_0;x_e)$ (où π_e est une probabilité et u une fonction d'utilité élémentaire) ou bien se réduire à une fonction contenant l'espérance mathématique des biens et leurs covariances. Cela importe peu. La demande de monnaie reste indéterminée. Dès lors, du strict point de vue de la généralisation des théories de l'équilibre économique général et du rendement social au cas du risque, la querelle de la spécification fonctionnelle de S (dont on trouvera les meilleurs échos contemporains dans Machina (1987) et sur laquelle s'est finalement polarisé le colloque de 1952) n'est pas fondamentale (et c'est bien ainsi que l'entend Debreu en 1959).

c) Cherchons donc à résoudre le paradoxe d'Arrow en oubliant « le paradoxe d'Allais », c'est-à-dire la justification ou la non-justification de l'axiomatique de Morgenstern-von Neumann-Savage.

Considérons encore (2), (3) et (4). La monnaie n'a plus de rôle parce qu'il existe autant d'actifs financiers incertains que d'états du monde. Pour faire place à la monnaie, *il suffit donc de supposer qu'il existe moins d'actifs incertains que d'états du monde.* (C'est toujours ce que l'on fait, implicitement ou explicitement, dans la théorie de l'équilibre temporaire).

Or, il est important de réaliser que cette façon de faire revient simplement à contraindre la distribution des B_e, c'est-à-dire à admettre que cette distribution n'est pas totalement « libre ». Plutôt que de retirer un actif financier de la course, on pourrait imposer, par exemple, que la variance des actifs incertains est un multiple donné de leur espérance mathématique. Soit $\bar{B} = \sum_e \pi_e B_e$ cette espérance. On peut écrire cette hypothèse sous la forme

$$\sum_e \pi_e [B_e - \bar{B}]^2 = \theta \bar{B} \tag{5}$$

où θ est une constante[4]. Ajoutons cette contrainte à (1) et soit η le multiplicateur associé. Les relations (2), (3) et (4) seront remplacées par

$$\sum_e \lambda_e = \gamma \lambda_0 \tag{6}$$

$$\lambda_e = \gamma_e \lambda_0 + \eta \pi_e [2[B_e - \bar{B}] - \theta] \tag{7}.$$

4. Ceci peut s'interpréter de diverses manières. On ne suit pas nécessairement ici l'interprétation d'Allais.

Ces dernières entraînent

$$\gamma = \sum_e \gamma_e - \frac{\eta}{\lambda_0}\theta \tag{8}$$

de sorte que l'indétermination de la monnaie disparaît.

Cette façon de résoudre le paradoxe d'Arrow revient à retrouver le modèle d'Allais (1953)[5]. La facteur η/λ_0 est évidemment relié à la mesure locale de l'aversion pour le risque. Ce point mériterait aussi d'autres développements.

CONCLUSION

On trouvera dans Boiteux, de Montbrial et Munier (1986) une remarquable bio-bibliographie de Maurice Allais. On trouvera dans ce même livre (dont la parution — et le punch qu'y a ajouté Grandmont (1988) — a sans doute réveillé la conscience du jury du prix Nobel) une non moins remarquable liste de contributions originales où Allais s'est montré précurseur. Rappelons rapidement que la première notion « exacte » du surplus du consommateur est de Maurice Allais (1943) ; que la conception de la frontière des utilités est d'Allais (1943) et non de Samuelson (1950) ; que le principe de l'existence de l'optimum ainsi que l'analyse de la stabilité de l'économie walrasienne sont également d'Allais (1943) ; que la conception du non-tâtonnement et de la dynamique non-walrasienne sont d'Allais (1943) ; que le premier traité d'analyse dimensionnelle est d'Allais (1943) et non de De Jong (1967) ; que le principe du second rang fait aussi partie d'Allais (1943).

C'est à Allais (1947) qu'il faut attribuer le modèle des encaisses monétaires que l'on attribue généralement à Baumol ou Tobin, les règles d'or de l'accumulation que l'on attribue généralement à Phelps ou Swan, la liste à peu près complète des « Turnpike theorems ». En contribuant au livre de Boiteux, de Montbrial et Munier (1986), Malinvaud (1986) (adaptation anglaise (1987)) s'est rendu compte qu'Allais (1947) contenait aussi le modèle des générations renouvelées que l'on attribue en général à Samuelson (1958).

Il n'en fallait pas plus bien sûr pour qu'Allais reçoive enfin le prix Nobel. Cependant, cette liste, ainsi que la tentation d'allonger cette liste, risquent de confiner Maurice Allais à un rôle de précurseur. Pourquoi en effet lire un auteur que l'état courant de la science a retrouvé ? Nous avons donc choisi de souligner et, espérons-nous, d'éclairer trois contributions de Maurice Allais qui sont toujours d'« actualité ». Ne pas lire Allais, c'est souvent se condamner à la « redécouverte indépendante ».

BIBLIOGRAPHIE

ALARIE, Y., C. BRONSARD et P. OUELLETTE, « Preferences and Normal Goods : A Necessary and Sufficient Condition », Miméo, Université de Montréal, 1988.

5. Celui de la page 81.

ALLAIS, M., *À la recherche d'une discipline économique.* Paris, Ateliers Industria, 1943. Réédité sous le titre *Traité d'économie pure*, Paris, Imprimerie Nationale, 1952.

ALLAIS, M., *Économie et intérêt,* Paris, Imprimerie Nationale et Librairie des Publications Officielles, 1947.

ALLAIS, M., « Généralisation des théories de l'équilibre économique général et du rendement social au cas du risque », *Econométrie*, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 81-120, 1953.

ALLAIS, M., *Les fondements du calcul économique,* Paris, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1967.

BARTEN, A.P., « Preference and Demand Interactions Between Commodities », in *Welvaart,* Opstellen aangebden aan P. Hennipman, Leiden, Stenfert Kroese, 1971.

BARTEN, A.P. et L.J. BETTENDORF, « Price Formation of Fish : An Application of an Inverse Demand System », Miméo, Catholic University of Leuven, 1988.

BOITEUX, M., et T. de MONTBRIAL et B. MUNIER, *Marchés, capital et incertitudes : essais en l'honneur de Maurice Allais,* Paris, Economica, 1986.

BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD, « Growth, Desirability, Profitability and Unemployment », *Annales d'économie et de statistique* 6/7, 13-35, 1987.

CHAMPSAUR, P., J. DREZE et C. HENRY, « Stability Theorems with Economic Applications », *Econometrica* 45, 273-294, 1977.

CHARETTE, L. et C. BRONSARD, « Antonelli-Hicks-Allen et Antonelli-Allais-Barten : sur l'utilisation des conditions d'intégrabilité d'Antonelli », *Recherches économiques de Louvain*, 25-34, 1975.

DEBREU, G., *Theory of Value,* New York, Wiley, 1959.

DE JONG, F.J., *Dimensional Analysis for Economists,* Amsterdam, North Holland, 1967.

FISHER, F.M., *Disequilibrium Foundations of Equilibrium Economics,* Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

GRANDMONT, J.M., « Report on M. Allais' Scientific Work », Miméo, CNRS et CEPREMAP, 1988.

HICKS, J., *Value and Capital,* New York, Oxford University Press, 2e édition, 1946.

MACHINA, M.J., « Choice Under Uncertainty : Problems Solved and Unsolved », *The Journal of Economic Perspectives* 1, 121-155, 1987.

MALINVAUD, E., *Leçons de théorie microéconomique,* 4e édition, Paris, Dunod, 1982.

MALINVAUD, E., « Maurice Allais, précurseur méconnu des modèles à générations renouvelées », dans Boiteux, M., T. de Montbrial et B. Munier, 1986.

MALINVAUD, E., « The Overlapping Generations Model in 1947 », *Journal of Economic Literature* 25, 103-105, 1987.

NEGISHI, T., « The Stability of a Competitive Economy : A Survey Article », *Econometrica* 30, 635-69, 1962.

SALVAS-BRONSARD, L., D. LEBLANC et C. BRONSARD, « Estimating Demand Equations : The Converse Approach », *European Economic Review* 9, 301-321, 1977.

SAMUELSON, P.A., *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1947.

SAMUELSON, P.A., « Evaluation of Real National Income », *Oxford Economic Papers* 2, 1-29, 1950.

SAMUELSON, P.A., « An Exact Consumption-Loan Model of Interest with and without the Social Contrivance of Money », *Journal of Political Economy* 66, 467-482, 1958.

SAMUELSON, P.A., « Complementarity — An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory », *Journal of Economic Literature* 12, 1255-1290, 1974.