L'Actualité économique

L’instabilité structurelle dans le modèle de croissance avec ressource non renouvelable
Structural Instability in the Growth Model with Exhaustible resources

N. M. Hung

Volume 57, numéro 3, juillet–septembre 1981

21e Congrès annuel de la Société Canadienne de Science économique

URI : https://id.erudit.org/iderudit/600991ar
DOI : https://doi.org/10.7202/600991ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Résumé de l'article

The analysis of the question of structural stability in the growth model with exhaustible resources consists essentially in the examination of the long term values of capital and consumption as they result from parametric variations. The parameters used in this study relate to ethic (discount rate) and to technology (elasticity of substitution between resource and capital and technical progress). Considering the structural stability, the already known results are generalized in two directions. First, a general description of production technology is made. Second, a special attention is given to the question of technological innovation. An analysis of the form of the Hicksian neutral technical progress is made considering an economy with a Cobb-Douglas production function.

L'INSTABILITÉ STRUCTURELLE DANS LE MODÈLE DE CROISSANCE AVEC RESSOURCE NON RENOUVELABLE (*)

I- INTRODUCTION

Dans un article classique, Liviatan & Samuelson [9] ont indiqué le comportement « catastrophique » d'un modèle de croissance optimale avec production jointe décrite par la fonction de production $F(K, \dot{K})$ où F satisfait aux hypothèses néoclassiques et où K et $\dot{K}$ désignent respectivement le stock de capital et sa variation intertemporelle. Ainsi, le stock de capital K^* dans un équilibre de long terme ferait des sauts lorsque le taux d'escompte δ atteint les valeurs critiques δ^1 et δ^2 définissant les bornes de l'ensemble de bifurcation selon la terminologie de Thom [19] et de Zeeman [21].[1] Caractérisé d'instabilité structurelle, un tel comportement a attiré tout récemment l'attention de W. Brock [2] et de M. Magil [11] qui ont donné indépendamment des analyses générales applicables aux modèles économiques dynamiques.

Sans exception, la fonction de production dans le modèle de croissance avec une ressource non renouvelable est conventionnellement décrite par $F(K, \dot{S})$ où $\dot{S}$ désigne la variation intertemporelle du stock de la ressource. Étant donné la ressemblance de cette fonction avec celle utilisée dans le modèle étudié par Liviatan & Samuelson, une question se pose : l'instabilité structurelle est-elle aussi présente dans le modèle avec une ressource non renouvelable ?

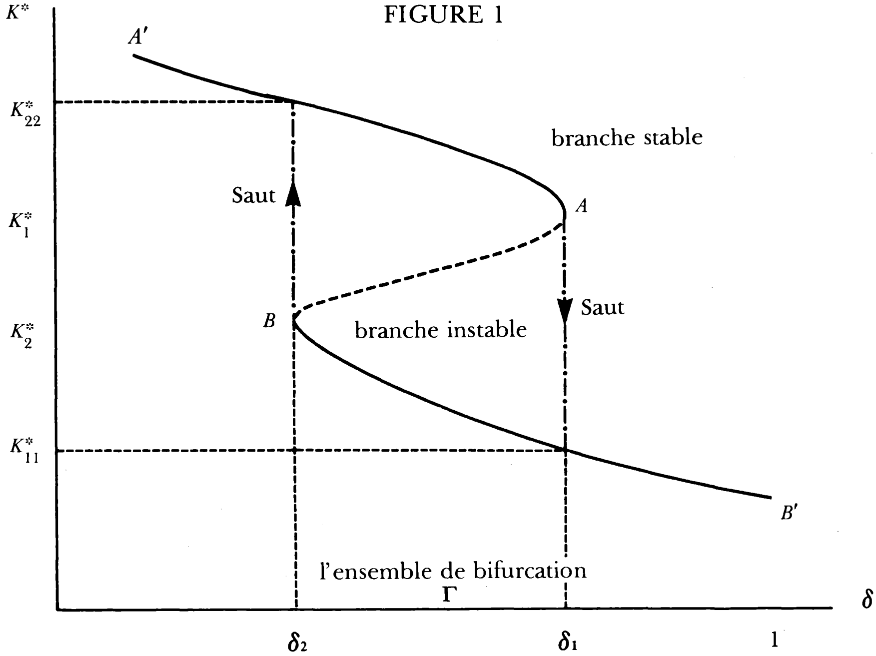
Dans la littérature en économie des ressources naturelles, les résultats obtenus indiquent que la réponse à la question posée ci-dessus est plutôt affirmative. Lorsque la fonction de production est du type Cobb-Douglas, le stock de capital à long terme tend vers zéro si le taux d'escompte est positif, et vers l'infini si le taux d'escompte est nul

---

* Ce texte a été présenté au 49e congrès de l'ACFAS (13-14 mai 1981) à l'Université de Sherbrooke. Une version similaire mais plus complète se trouve dans « Exhaustible Resource, Structural Unstability and Innovation Sustaining a Non Degenerated Economy » du même auteur.

1. Dans la figure 1, la variété qui définit les valeurs du stock de capital en équilibre de long terme est composé d'une branche instable AB et des deux branches stables $A'A$ et BB'. Si l'on réduit le taux d'escompte à δ_2, l'équilibre fera un saut de B à la branche stable AA'. Et inversement, si l'on augmente le taux d'escompte à δ_1, l'équilibre fera un saut de B à la branche BB'.

FIGURE 1



(Dasgupta & Heal [6] ou Solow [15]). Lorsque la fonction de production est du type CES, et quelque soit le taux d'escompte, le stock de capital à long terme tend vers zéro si l'élasticité de substitution entre les facteurs ressource et capital est inférieure à l'unité, vers une valeur positive si l'élasticité de substitution est supérieure à l'unité (Dasgupta & Heal [5]). Notons que la technologie est représentée dans la littérature par les formes paramétriques très spécifiques.

Essentiellement, l'analyse de la question de la stabilité structurelle dans le modèle de croissance avec ressource non renouvelable consiste à examiner les valeurs à long terme du capital et de la consommation résultant des variations paramétriques. Les paramètres qui retiennent notre attention sont stratégiques dans l'étude de ressource non renouvelable. Ils sont d'ordre éthique (e.g. taux d'escompte) et d'ordre technologique (e.g. l'élasticité de substitution entre ressource et capital, taux de progrès technique). À propos de la question de stabilité structurelle ci-haut mentionnée, nous allons généraliser dans cette note les résultats connus dans deux directions. En premier lieu, nous optons pour une description générale de la technologie de production. En second lieu, nous portons une attention particulière à la question d'innovation technologique. Une analyse concernant la forme de progrès technique neutre dans le sens Hicksien — forme jusqu'ici ignorée dans la littérature d'économie des ressources naturelles — sera détaillée pour une économie dont la production est du type Cobb-Douglas.

Dans la section II, nous exposons le modèle de base servant à notre discussion et nous dérivons les conditions d'optimalité.

Le cas où la ressource naturelle n'est pas nécessaire à la production est examiné dans la section III et celui où elle est indispensable à la production dans la section IV. Cette distinction est essentiellement technologique : la classe de technologies pour lesquelles la ressource n'est pas nécessaire peut inclure comme cas particulier la fonction CES avec l'élasticité de substitution des facteurs plus grande que l'unité. La classe dans laquelle la ressource est indispensable contient quant à elle la fonction CES avec l'élasticité de substitution inférieure à l'unité.

Lorsque la ressource n'est pas nécessaire, l'économie se dirige à long terme vers un état non dégénéré, où les valeurs du stock de capital et de consommation ne sont pas nulles. Ce résultat est valide quelque soit le taux d'escompte, et même en absence de l'innovation. La rareté absolue de la ressource ne pose ainsi aucun problème du type « Club de Rome ».

Dans la section IV où la ressource naturelle est indispensable à la production, le taux d'escompte devient un paramètre critique. En l'absence de progrès technique, l'économie se dirige à long terme vers un état dégénéré si le taux d'escompte est positif, et vers un état non dégénéré si le taux d'escompte est nul. Pour éviter l'état dégénéré — appelé aussi « l'apocalypse » — où le stock de capital (et donc, la production et la consommation) à long terme est nul, il faut absolument la présence d'innovation technologique. Si cette dernière est du type exponentiel et neutre au sens Hicksien, une condition suffisante est établie pour que l'équilibre ne soit pas dégénéré à la limite. Cette condition est relativement « forte » mais peut être affaiblie si l'on considère des formes paramétriques comme la fonction de production Cobb-Douglas.

Dans la section V, nous considérons en détail la question d'innovation technologique. Nous reprenons l'examen d'une économie dont la production est du type Cobb-Douglas. Cependant, contrairement à de nombreuses discussions où l'innovation est introduite sous forme d'un stock de « Savoir faire » qui joue un rôle identique à un facteur physique de production (voir [4], [13], [17], [18]), nous adoptons plutôt le traitement classique, à savoir, l'innovation de la forme du progrès technique neutre au sens Hicksien. Quand ce progrès est exogène, une condition nécessaire et suffisante concernant un taux qui soutient une économie non-dégénérée est trouvée. Quand ce progrès est endogène, i.e. quand l'innovation est une variable de décision, même coûteuse, il est clairement démontré que « l'apocalypse » peut toujours être évitée et qu'à la longue, l'économie se dirige vers le pays de Cocagne où la rareté n'est plus de mise.

II- LE MODÈLE DE BASE, L'OPTIMALITÉ ET QUELQUES DÉFINITIONS

Le modèle employé dans la discussion est du type néoclassique. La production est décrite par :

$$Y_t = F(K_t, \dot{S}_t, t) = \alpha(t) F(K_t, \dot{S}_t)$$

où au temps t, K_t désigne le stock de capital, S_t l'extraction de ressource utilisée comme input et $\alpha(t)$ le facteur de progrès technique neutre. Si C_t désigne la consommation, les équations décrivant la dynamique du système sont :

$$\dot{K}_t = \alpha F(K_t, R_t) - C_t \text{ ; } K_0 \text{ donné} \tag{1}$$

$$\dot{S}_t = -R_t \text{ ; } S_0 \text{ donné.} \tag{2}$$

Soit $U(C_t)$ la félicité au temps t et δ le taux d'escompte, l'extraction de ressource et la consommation optimale sont les solutions du problème suivant :

$$\underset{\{C,R\}}{Max} \int_0^\infty U(C)\, e^{-\delta t}\, dt$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} &\dot{K} = \alpha F(K, R) - C \text{ ; } K_0 \text{ donné} \\ &\dot{S} = -R \qquad\qquad\quad \text{ ; } S_0 \text{ donné} \\ &\{K, S, C, R\} \geqq \{0\} \text{ (conditions de non-négativité)} \end{aligned} \tag{3}$$

où l'indice t est omis afin de simplifier la notation symbolique.

Le problème (3), formulé en terme d'un problème de commande optimale en horizon infini, est assez familier ([5], [6], [8], [15], etc...). Nous prenons les hypothèses néoclassiques :

H.1 $U(C)$ est de classe C^2, monotone croissante et strictement concave. De plus :

H.1.1 $\lim U'(C) = \infty$ quand $C \to 0$, $\lim U'(C) = 0$ quand $C \to \infty$

H.2 $F(K, R)$ est de classe C^2, monotone croissante et strictement concave en K et R.

De plus :

H.2.2 $\lim F(K, R) = 0$ quand $K \to 0$
$\lim F_K(K, R) = \infty$ quand $K \to 0$
$\lim F_K(K, R) = 0$ quand $K \to \infty$
$\lim F_R(K, R) = \infty$ quand $R \to 0$

Nous distinguons 2 cas. Si $\lim F(K, R) = 0$ quand $R \to 0$, la ressource est indispensable à la production. Si par contre, $\lim F(K, R) > 0$ quand $R \to 0$, la ressource n'est pas nécessaire à la production.

L'Hamiltonien courant de (3) s'écrit :

$$H(\cdot) = U(C) - qR + P[\alpha F(K, R) - C] \qquad (4)$$

où q et P désignent respectivement les prix fictifs (efficients) de la ressource et du capital. L'hypothèse H.1.1 nous permet de considérer la solution intérieure de (3) dont les conditions nécessaires d'optimalité s'obtiennent de façon routinière (voir Arrow & Kurz [1][2] :

$$U'(C) = P \qquad (5)$$

$$P\alpha F_R = q \qquad (6)$$

$$q = q_0 e^{\delta t} \qquad (7)$$

$$\dot{P} = \delta P - P\alpha F_K \qquad (8)$$

Une trajectoire optimale (K_t^*, S_t^*) qui satisfait aux (5) - (10) et (1), (2) est celle à laquelle correspondent les décisions optimales concernant l'extraction R_t^* et la consommation C_t^*. D'autre part, le système de prix efficients P^* et q^* qui en résultent est identifié comme les prix compétitifs avec anticipation parfaite (voir Mitra [12]). À la limite, si $K_\infty^* = 0$ (donc $C_\infty^* = 0$), l'économie est dégénérée : l'apocalypse est « optimale»[3]. Si $K_\infty^* > 0$ (donc $C_\infty^* > 0$), l'économie tend vers un état non-dégénéré. Parmi ces états se trouve celui où $K_\infty^* = \infty$ (et donc $C_\infty^* = \infty$), un état « paradisiaque » ou « Pays de Cocagne ». Si le maximisant Hamiltonien $H^* = \operatorname{Max} H_{C,R}(\,)$ est concave en K^* et S^*, une trajectoire qui satisfait (1), (2) (5)-(10) et les conditions de transversalités :

2. Nous supposons l'existence de solution au probléme (3). Cette question d'existence a été examinée dans les cas particuliers par Dasgupta & Heal [5], Solow [15], Stiglitz [16] où U et F prennent des formes paramétriques et dans le cas général (avec succès limité) par *T.* Mitra [12].

3. Le langage employé est froidement « utilitariste ». Peut-être personne ne peut accepter cette « optimalité » sans froncer les sourcils. On devrait qualifier alors cet état d'apocalypse de « paradoxalement » optimale et on apprécierait mieux les conditions qui permettent à l'économie d'atteindre un état non dégénéré.

$$\lim e^{-\delta t} P_t K(t) = 0 \; ; \; \lim e^{-\delta t} P_t \geq 0 \text{ quand } t \to \infty \tag{9}$$

$$\lim e^{-\delta t} q_t S(t) = 0 \; ; \; \lim e^{-\delta t} q_t \geq 0 \text{ quand } t \to \infty \tag{10}$$

est en fait une trajectoire optimale.

Un premier résultat connu est le suivant :

Lemme 2.1

L'extraction optimale de ressource est continue et positive pour tout $t \in [0, \infty]$ si $\lim\limits_{R \to 0} F(K, R) > 0$ ou si $\lim\limits_{R \to 0} F_R(K, R) = \infty$. En plus, la trajectoire optimale satisfait à la condition d'efficacité $\lim\limits_{t \to \infty} S_t^* = 0$ et $\frac{d}{dt}(F_{R^*})/F_{R^*} = \alpha F_{K^*} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ et à l'équation de Ramsey $\dot{C}^*/C^* = \frac{1}{\eta(C)}[\alpha F_{K^*} - \delta]$ où $\eta(C)$ désigne l'élasticité de la félicité marginale.

On peut voir, à partir de (10), que $\lim\limits_{t \to \infty} S_t^* = 0$. Prenons la différentiation logarithmique de (6) et y substituons (7) et (8), nous obtenons la condition d'efficacité. Quant à l'équation de Ramsey, on y parvient en prenant la différentiation de (5) et y substituant (8). Pour le reste du lemme 2.1, on peut trouver la preuve dans [6].

III- RESSOURCE NON NÉCESSAIRE À LA PRODUCTION

Quand la ressource n'est pas nécessaire, l'économie ne serait jamais dégénérée même en l'absence de progrès technique, i.e. $\alpha(t) \equiv 1$ pour tout t. Dans ce cas, à partir de (8) le stock de capital à long terme est déterminé par :

$$\lim_{t \to \infty} F_K(K_t^*, R_t^*) = \delta \tag{11}$$

D'après lemme 2.1, $S_\infty^* = 0$ et par conséquence $R_\infty^* = 0$ quant $t \to \infty$.

Ainsi :

$$F_K(K_\infty^*, 0) = \delta \tag{12}$$

est l'équation qui détermine K^*_∞. Étant donné $H2$ et $H2.2$, la valeur de K^*_∞ est uniquement déterminée pour un taux d'escompte positif. Il s'ensuit également qu'à long terme :

$$C^*_\infty = F(K^*_\infty, 0) > 0 \qquad \text{pour } \delta > 0$$

Avec un taux d'escompte nul, il est évident que $K^*_\infty = \infty$ d'après l'hypothèse $H2.2$. Notons tout de suite que $C^*_\infty = \infty$, cependant $\lim_{t \to \infty} \frac{C^*_t}{K^*_t} = 0$ et $\lim_{t \to \infty} \frac{P^*_t}{q^*_t} = 0$. Il est également facile de constater que le stock de capital à long terme (et donc la consommation) est inversement proportionnel à la valeur du taux d'escompte, i.e. $dK^*_\infty/d\delta < 0$ et $dC^*_\infty/d\delta < 0$. En résumé, nous avons :

Proposition 3.1

> Même en l'absence de l'innovation sous forme de progrès technique neutre, lorsque la ressource n'est pas nécessaire à la production, l'économie à long terme
>
> i) est non dégénérée en présence du taux d'escompte de la félicité future ;
>
> ii) tend vers « Pays de Cocagne » en l'absence du taux d'escompte de la félicité future.

Ainsi, il n'y aurait pas de fin du monde tel qu'annoncé par le Club de Rome lorsque la ressource n'est pas nécessaire à la production. L'économmie tend vers un état stationnaire dans lequel le stock de ressource est complètement épuisé et le stock de capital reproductible atteint la quantité à laquelle sa productivité marginale est égale au taux d'escompte. L'optimum stationnaire dans ce cas ne diffère guère de celui qui résulte du modèle de croissance sans ressource naturelle, coïncidant avec le *Turn-pike* propre à l'économie dynamique dont une analyse détaillée se trouve dans Haurie & N.M. Hung [8].

Tournons-nous maintenant vers le cas où la ressource est indispensable à la production. L'apocalypse y est possible et le progrès technique devient le facteur nous permettant de planifier pour une économie non dégénérée.

IV- RESSOURCE INDISPENSABLE À LA PRODUCTION

Une ressource est indispensable si $\lim_{R \to 0} F(K, R) = 0$. Nous allons examiner le comportement à long terme de l'économie en relation avec les valeurs critiques des paramètres qui nous intéressent, à savoir, le taux d'escompte et le progrès technique.

i) Considérons le cas où le taux d'escompte de la félicité future est nul et le progrès technique est absent ($\delta = 0$, $\alpha(t) \equiv 1, \nabla t$). Nous avons $q^*_{(t)} = q_0$ selon (8). D'autre part $P^* = \frac{q_0}{F_{R^*}}$ selon (6) et à la limite

$P^*_\infty = 0$ si $F_R(K, 0) = \infty$. Il s'ensuit que $C^*_\infty = \infty$ d'après (5) pour la fonction de félicité qui satisfait à H.1.1. Conséquemment $K^*_\infty = \infty$, i.e., l'économie atteint le « Pays de Cocagne » à long terme[4].

Supposons qu'il y ait progrès technique neutre sous la forme exponentielle, c'est-à-dire, $\alpha(t) = e^{\lambda t}$. De (6) et (7), nous obtenons :

$$P^* F_{R^*}(K, R) = q_0 e^{-\lambda t}.$$

Quant $t \to \infty$, $P^* F_{R^*} \to 0$. Sachant que $R^* = 0$, il s'ensuit que $P^*_t \to 0$ pour $F_{R^*} \leqq \infty$ quant $t \to \infty$. Par conséquent $U'(C^*_t) \to 0$, ce qui implique que $C^*_\infty = \infty$ de façon à ce que H.1.1 soit satisfaite. Évidemment, dans ce cas $K^*_\infty = \infty$, i.e., l'économie tend vers le Pays de Cocagne à la limite.

ii) Considérons maintenant le cas où le taux d'escompte de la félicité future est positif. Nous allons démontrer, qu'en l'absence du progrès technique, l'économie serait dégénérée.

L'équation (6) s'écrit maintenant $P^* F_{R^*} = q_0 e^{\delta t}$. Quant $t \to \infty$, $P^* F_{R^*} \to \infty$ et $R^* \to 0$. Si $\lim_{R^* \to 0} F_{R^*}(K^*_\infty, R^*) < \infty$, alors il faut que $P^* \to \infty$, donc $U'(C^*) = \infty$ et par conséquence $C^*_\infty = 0$. Il s'ensuit aussi que $K^*_\infty = 0$. Si $\lim_{R^* \to 0} F_{R^*}(K^*_\infty, R^*) = \infty$, P^*_∞ puisque $q^*_0 e^{\delta t}$ tend exponentiellement vers l'infini. Encore une fois $C^*_\infty = 0$ d'après H.1.1 et $K^*_\infty = 0$.

Est-ce que le progrès technique permettrait à l'économie de ne pas dégénérer comme dans le cas précédent ? Prenons la forme exponentielle de ce dernier, i.e. $\alpha(t) = e^{\lambda t}$. L'équation (7) peut être écrite comme $P^* F_{R^*} = q_0 e^{(\delta - \lambda)t}$. L'analyse du comportement à la limite peut se faire comme auparavant :

$$\text{Si } \delta > \lambda,\ P^* F_{R^*} \to \infty \text{ et donc } C^*_\infty = 0 \text{ et } K^*_\infty = 0.$$

4. On vérifie également que $\left\{ R^*_t,\ S^*_t,\ \frac{Y^*_t}{K^*_t},\ \frac{C^*_t}{K^*_t},\ \frac{R^*_t}{K^*_t},\ \frac{P^*_t}{q^*_t} \right\}$ tendent vers 0, tandis que $\{ C^*_t, K^*_t, F^*_R, Y^*_t \}$ tendent vers ∞ quand $t \to \infty$.

Si $\delta < \lambda$, $P^* F_{R^*} \to 0$ et donc pour $F_{R^*}(K^*, 0) \leqq \infty$, $P^* \to 0$.

Par conséquence $C^*_\infty = K^*_\infty = \infty$

Si $\delta = \lambda$, nous retombons dans le cas i) précédent.

En somme l'économie atteint le Pays de Cocagne si le taux de progrès technique est au moins égal au taux d'escompte. Autrement, elle se dirige à la limite vers l'apocalypse.

Laissons-nous résumer la discussion précédente dans :

Proposition 4.1

> Lorsque la ressource non renouvelable est indispensable à la production, si le taux d'escompte est positif
>
> i) en l'absence du progrès technique, l'économie est dégénérée à long terme
>
> ii) si le taux de progrès technique neutre soit au moins égal aux taux d'escompte, l'économie tend à la limite vers le Pays de Cocagne.

Proposition 4.2

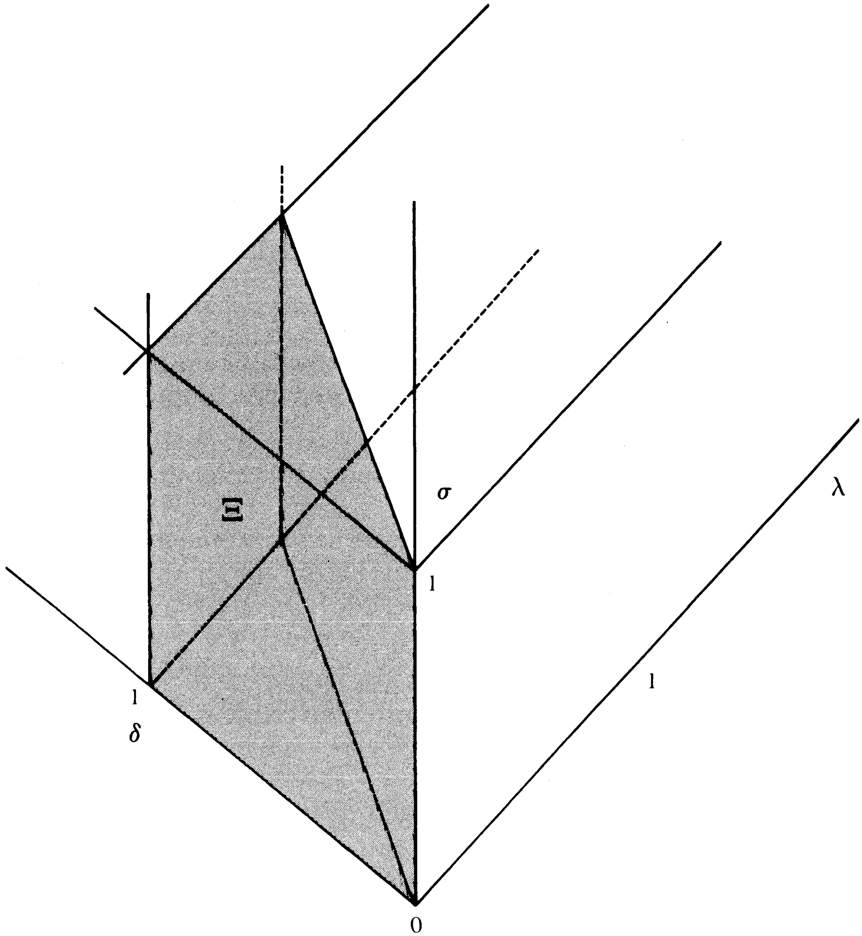
> Lorsque la ressource non renouvelable est indispensable à la production et le taux d'escompte de la félicité future est nul, même en absence de progrès technique l'économie se dirige vers un état non dégénéré à long terme.

Il est peut-être utile de récapituler les résultats obtenus. Afin de les illustrer, graphiquement, prenons la forme paramétrique *CES* pour décrire la technologie.[5] Ainsi, la ressource n'est pas nécessaire si l'élasticité de substitution des facteurs $\sigma > 1$ et elle est indispensable si $\sigma \leqq 1$. La substitution du capital à la ressource non-renouvelable est « facile » dans le premier cas, et « difficile » dans le deuxième cas.

Le vecteur de paramètres considérés θ est composé de δ, λ, σ ; i.e. du taux d'escompte, du progrès technique neutre et de l'élasticité de substitution entre le capital et la ressource. D'après les propositions 3.1, 4.1 et 4.2 l'économie atteint le Pays de Cocagne quelque soit δ et λ si $\sigma > 1$. Pour $0 < \sigma \leq 1$, l'économie est dégénérée en apocalypse si

5. Nos résultats rapportés ici sont valides pour une spécification générale de la technologie de production. Cependant la distinction entre une ressource qui n'est pas nécessaire et une ressource indispensable à la production est convenablement exprimée par la valeur numérique de σ de la fonction de production *CES*. Les résultats spécifiques avec cette fonction sont trouvés dans [5].

FIGURE 2



$\lambda < \delta$. C'est seulement si $\lambda \geqq \delta$ qu'elle se dirige vers le Pays de Cocagne à long terme. Soit l'ensemble :

$$\Xi = \{ \theta_i \} = \{ \sigma, \lambda, \delta \mid 0 \leq \sigma \leq 1 \text{ et } 0 \leq \lambda < \delta < 1 \}$$

et $C\Xi$ le complément de Ξ dans V_+^3 où naturellement

$$V_+^3 = \{ \sigma, \lambda, \delta \mid 0 \leq \sigma \leq \infty, 0 \leq \lambda, 0 \leq \delta \leq 1 \}$$

Pour tout vecteur de paramètres θ contenu dans $C\Xi$, l'économie serait non dégénérée à la limite. La figure (2) illustre l'ensemble Ξ.

Notons finalement que $\lambda \geqq \delta$ est une condition suffisante assez forte qui garantit une économie non dégénérée. Cette condition sera affaiblie dans la section qui suit.

V- LE CAS D'UNE ÉCONOMIE À LA COBB-DOUGLAS

Nous allons analyser en plus de détail le cas où la fonction de production est du type Cobb-Douglas avec rendement constant :

$$Y_t = \alpha(t)\, K_t^{\beta_1} R_t^{\beta_2},\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \qquad (13)$$

où $\alpha(t)$ est le facteur de progrès technique. Nous énonçons d'abord les résultats connus en cas d'absence du progrès technique, puis nous donnons ensuite la condition nécessaire et suffisante concernant le taux de progrès technique exogène qui assure une économie non dégénérée à la longue. Finalement, nous examinons le progrès technique déterminé par l'investissement en activité innovatrice. Dans ce qui suit, nous adaptons la fonction de félicité :

$$U(C) = C^{1-\eta},\ 0 < \eta < 1 \qquad (14)$$

A. *En absence du progrès technique*

On peut expliciter la solution optimale $C^*(t)$, $R^*(t)$ et donc $K^*(t)$ et $S^*(t)$ comme l'ont fait Dasgupta et Heal [5], [6].

En utilisant (13) et (14) dans le problème (3) dont la solution est appelée un optimum, et en désignant $\dot{x}/x$ par $\hat{x}$, nous avons :

Proposition 5.1

(Dasgupta & Heal [6], 1979)

i) Si le taux d'escompte est nul, alors :
À la limite $C^*_\infty = K^*_\infty = \infty$, $\hat{Y}^* = \hat{C}^* = 0$.
De plus, $R^*/S^* \to 0$, $\dfrac{C^*}{Y^*} = 1 - s^* \to \dfrac{\eta\beta_1 - \beta_2 - 1}{\eta}$

ii) Si le taux d'escompte est positif, alors :
À la limite $C^*_\infty = K^*_\infty = 0$. De plus
$R^*/S^* \to \dfrac{\delta}{\eta}$ et $\dfrac{C^*}{Y^*} \to 0$

Le cas de Cobb-Douglas est celui où la ressource est indispensable et $F_R(K,0) = \infty$. Donc, la proposition 5.1 est parfaitement compatible avec les propositions 3.1, 4.1 et 4.2. Toutefois, le comportement à la limite des variables peut être obtenu avec cette forme paramétrique dont la maniabilité est connue. En particulier, l'épargne est constante tout au long de la trajectoire optimale avec le taux d'escompte nul. Cette épargne excède β_2, le coefficient de partage du facteur ressource.

B- *Progrès technique soutenant une économie non dégénérée*

Considérons le progrès technique exogène sous forme de $\alpha(t)$ dans la fonction de production (13).

Avec $\delta > 0$, une économie à la Cobb-Douglas se dégénère en absence du progrès technique. Quel serait alors le taux de ce dernier qui garantirait la non dégénérescence de l'économie ? Nous allons en donner une condition nécessaire et suffisante.

En vue de Lemme 2.1, la trajectoire optimale de l'économie satisfait aux conditions d'efficacité et à l'équation de Ramsey. Explicitement, nous avons

$$\hat{Y}^* - \hat{R}^* = \beta_1 z^* \tag{15}$$

$$\hat{C}^* = \frac{1}{\eta}[\beta_1 z^* - \delta] \text{ où } z = \frac{Y}{K} \tag{16}$$

D'après l'équation de l'affectation des ressources $Y = C + \dot{K}$, nous obtenons

$$\hat{K} = sz \qquad \text{où } s = 1 - \frac{C}{Y} = 1 - x \tag{17}$$

Notons qu'à partir de (13) :

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \beta_1 \hat{K} + \beta_2 \hat{R} \tag{18}$$

En combinant (17) et (18), nous avons l'équation $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \beta_1 sz + \beta_2 \hat{R}$ qui doit être satisfaite par notre économie. En particulier, pour la trajectoire optimale obéissant (15) et (16), elle est :

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \beta_1 s^* z^* + \beta_2 \hat{R}^* \tag{19}$$

L'état stationnaire optimal est défini par $z^* = z^* = 0$. À partir de (15), (17) et (18), nous avons :

$$\hat{Y}^* = \frac{\hat{\alpha}}{\beta_1} + z^*(1 - x^* - \beta_2) \tag{20}$$

Notons que $\hat{z}^* = \hat{Y}^* - \hat{K}^*$, nous avons :

$$\hat{z}^* = \hat{\alpha} + (\beta_1 - 1)(1 - x^*)z^* - \beta_1\beta_2 z^* \tag{21}$$

Également $\hat{x}^* = \hat{C}^* - \hat{Y}^*$. Utilisons (16), nous obtenons

$$\hat{x}^* = z^*\left[x^* - 1 + \frac{\beta_1}{\eta} + \beta_2\right] - \frac{\delta}{\eta} - \frac{\hat{\alpha}}{\beta_1}. \tag{22}$$

Le diagramme de phase est présenté dans la figure (3) où les courbes $\hat{z}^* = 0$ et $\hat{x}^* = 0$ ont respectivement les pentes positive et négative. L'état stationnaire optimale (le point E) est un équilibre en forme de point de selle[6] dans le sens dynamique.

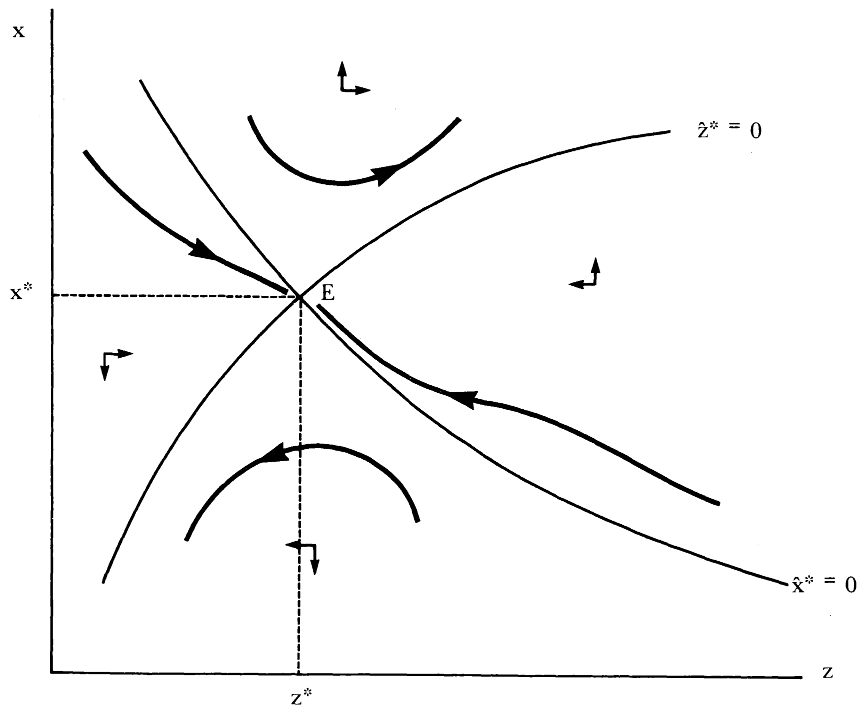
Le comportement asymptotique de l'économie peut être exprimé au point d'équilibre stationnaire E où $\hat{C}^*_\infty = \hat{K}^*_\infty \hat{Y}^*_\infty$. Utilisant (17) et (20), $\hat{K}^*_\infty = \hat{Y}^*_\infty$ implique

$$z^*_\infty = \frac{\hat{\alpha}}{\beta_1 \beta_2} \tag{23}$$

Substituant (23) dans (16) :

$$\hat{C}^*_\infty = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\hat{\alpha}}{\beta_2} - \delta\right] \tag{24}$$

FIGURE 3



6. Prenons l'approximation locale de (21) et (22) au point E (i.e., x^* et z^* tel que $\hat{x}^* = 0$ et $\hat{z}^* = 0$) et trouvons les racines caractéristiques de ce système. On vérifierait qu'il en existe deux de signe opposé.

et finalement $\hat{C}^*_\infty = \hat{K}^*_\infty$ implique à son tour :

$$s^*_\infty = \frac{\beta_1}{\eta}\left[1 - \frac{\delta\beta_2}{\hat{\alpha}}\right] = 1 - x^*_\infty \tag{25}$$

Désignons $\frac{R}{S} = \rho$ et alors $\hat{R} - \hat{S} = \rho$. Mais $\dot{S} = -R$; par conséquence $\hat{R} + \rho = \hat{\rho}$. À l'état stationnaire optimale $\hat{\rho}^*_\infty = 0$ et $\hat{K}^*_\infty = \hat{Y}^*_\infty = s^*_\infty z^*_\infty$. À partir de (15), $\hat{R}^*_\infty = (s^*_\infty - \beta_1)\, z^*_\infty$. Donc $\hat{\rho}^*_\infty = \rho^*_\infty + z^*_\infty(s^*_\infty - \beta_1) = 0$.

Ainsi,

$$\rho^*_\infty = [\, \beta_1 - s^*_\infty \,]\, z^*_\infty = \frac{\hat{\alpha}}{\beta_2} - \frac{1}{\eta}\left[\frac{\hat{\alpha}}{\beta_2} - \delta\right] \tag{26}$$

Reprenons notre notation à la section précédente, i.e. $\hat{\alpha} = \lambda$ où λ est le taux de progrès technique. À partir de (24), $C^*_\infty < 0$ implique que l'économie est dégénérée à la limite. Et inversement. Ainsi, l'économie serait non dégénérée si et seulement si $\lambda \geq \delta\beta_2$. Notons que $\beta_2 < 1$, d'où cette condition est plus faible que celle trouvée auparavant.

Résumons notre discussion dans :

Proposition 5.2

i) L'économie n'est non dégénérée à long terme si et seulement si le taux de progrès technique exogène λ est tel que $\lambda \geq \beta_2\delta$ où δ est le taux d'escompte et β_2 le coefficient de partage du facteur ressource.

ii) L'état de l'économie non dégénérée à long terme est un équilibre en forme de point de selle pour lequel :

$$R^* \to 0,\ S^* \to 0,\ C^* \to \infty,\ K^* \to \infty,$$

$$Y^*/K^* \to \frac{\lambda}{\beta_1\beta_2},\quad C^*/Y^* \to \frac{\beta_1}{\eta}\left[1 - \frac{\beta_2\delta}{\lambda}\right] - 1$$

$$s^* \to \frac{\beta_1}{\eta}\left[1 - \frac{\delta\beta_2}{\eta}\right],\quad R^*/S^* \to \frac{\lambda}{\beta_2} - \frac{1}{\eta}\left[\frac{\lambda}{\beta_2} - \delta\right]$$

C- *Progrès technique endogène : l'innovation optimale*

Le progrès technique est traité jusqu'ici comme une « manne » tombant du paradis. Qu'arrive-t-il si ce progrès est devenu une variable de décision endogène ?

Supposons qu'une partie de l'output soit affectée à l'activité *R & D* qui promouvoit le progrès technique. Quoique toute innovation est, de par sa nature, du domaine de l'incertitude, nous prenons quand même l'hypothèse héroïque du déterminisme (!)[7]. Dans ce contexte, l'accroissement du progrès est donné par :

$$\dot{\alpha}(t) = g(W(t)) \tag{27}$$

où g est une fonction continue et W est la dépense en R & D qui satisfait à :

$$Y = \alpha K^{\beta 1} R^{\beta 2} = C + W + \dot{K} \tag{28}$$

Si $\gamma(t)$ désigne le prix fictif du stock de « savoir faire » $\alpha(t)$, l'expression Hamiltonienne courante s'écrit :

$$H(\quad) = C^{1-\eta} - qR + p\,[\,\alpha K^{\beta 1} R^{\beta 2} - C - W\,] + \gamma g(W) \tag{29}$$

En addition à (5) - (10), nous avons les conditions nécessaires :

$$\gamma g'(W) = p \tag{30}$$

$$\dot{\gamma} = \delta\gamma - pK^{\beta 1} R^{\beta 2} \tag{31}$$

et les conditions de transversalités $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\delta t}\gamma_t \alpha_t = 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\delta t}\gamma_t \geq 0$. La différentiation logarithmique de (30) nous donne :

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{g''(W)}{g'(W)}\dot{W} = \frac{\dot{p}}{p}$$

Cette équation nous donne une condition d'efficacité additionnelle. Utilisant (8), l'efficacité dans l'activité innovatrice doit alors obéir à l'équation :

$$\delta - \beta_1 \frac{Y}{K} = \frac{g''(W)}{g'(W)} \cdot \dot{W} + \delta - g'(W) K^{\beta 1} R^{\beta 2}$$

7. En ce faisant, nous rejoignons un cortège important d'économistes, dont Shell [14], Usawsa [20] comme pionniers et plus récemment Takayama [18], C. Chiarella [4], Suzuki [17], Kemps et Long [10], etc. en économie des ressources naturelles.

Afin de rendre l'analyse possible, nous supposons que $g(W)$ est linéaire. En choisissant de façon appropriée l'échelle de mesure, posons $g(W) = W$. Ainsi, la condition d'efficacité précédente devient :

$$\beta_1 \frac{Y}{K} = K^{\beta_1} R^{\beta_2} = \frac{Y}{\alpha}$$

D'où :

$$K = \alpha\beta_1 \qquad (32)$$

tout au long d'une trajectoire efficace. Aussi, à partir de (32),

$$\hat{K} = \hat{\alpha} \qquad (33)$$

Nous sommes maintenant au point où nous pouvons répéter l'analyse précédente. Toute trajectoire optimale de l'économie doit satisfaire (15), (16), (19) et (33), i.e. :

$$\hat{Y}^* = \hat{\alpha}^* + \beta_1\hat{K}^* + \beta_2\hat{R}^* = \hat{\alpha}^* + \beta_1 s^* z^* + \beta_2\hat{R}^* \qquad (19')$$

$$\hat{Y}^* - \hat{R}^* = \beta_1 z^* \qquad (15')$$

$$\hat{C}^* = \frac{1}{\eta}\,[\beta_1 z^* - \delta] \qquad (16')$$

$$\hat{K}^* = \hat{\alpha}^* \qquad (33')$$

Encore une fois, à l'état stationnaire optimal $\hat{C}^*_\infty = \hat{K}^*_\infty = \hat{Y}^*_\infty$ qui est un point de selle vers lequel l'économie tend à la limite, nous avons à partir de (19') :

$$\hat{R}^*_\infty = - \frac{\beta_1\hat{K}^*_\infty}{\beta_2} \qquad (34)$$

En substituant (34) dans (15') :

$$z^*_\infty = \frac{\hat{\alpha}^*_\infty}{\beta_1\beta_2} \qquad (35)$$

D'autre part, comme $\hat{C}^*_\infty = \hat{K}^*_\infty = \hat{\alpha}^*$ selon (33'), nous avons à partir de (16') et (35) :

$$z^*_\infty = \frac{\delta}{\beta_1}\left[\frac{1}{1-\beta_2\eta}\right] \qquad (36)$$

Égalisant (35) et (36) pour trouver finalement :

$$\hat{\alpha}^*_\infty = \delta\beta_2 \left[\frac{1}{1-\beta_2\eta} \right] \qquad (37)$$

Comme $\eta < 1$, nous avons $\hat{\alpha}^*_\infty = \delta\beta_2$. En vue de la proposition 5.2, l'économie serait alors non dégénérée. Nous pouvons également substituer $\hat{\alpha}^*_\infty$ dans la proposition 5.2 (ii) pour avoir les valeurs limites.[8] Ainsi :

Proposition 5.3

i) Lorsque l'innovation est endogène, le progrès technique optimal est $\hat{\alpha}^*_\infty = \delta\beta_2 \left[\frac{1}{1-\beta_2\eta} \right]$. De plus, il permet à l'économie de ne jamais se diriger à long terme vers un état dégénéré.

ii) L'équilibre à long terme est en forme de point de selle pour lequel

$$R^* \to 0,\ S^* \to 0,\ C^* \to \infty,\ Y^* \to \infty$$

$$Y^*/K^* \to \frac{\delta}{\beta_1-\beta_1\beta_2\eta}\ ;\ \frac{C^*+W^*}{Y^*} \to 1-\beta_1\beta_2$$

$$s^* \to \beta_1\beta_2\ ;\ \frac{R^*}{S^*} \to \frac{\delta}{\eta}\left[1 + \frac{1}{1-\beta_2\eta}(\eta-1) \right].$$

VI- CONCLUSION

Dans cet article, le comportement de saut « catastrophique » qui résulte des variations paramétriques de l'équilibre à long terme dans un modèle de croissance avec ressource non renouvelable est analysé. En l'absence d'innovation et pour un taux d'escompte de la félicité future positif, l'état de l'économie représenté par le stock de capital en équilibre à long terme saute de l'infini à zéro lorsque la ressource, étant non nécessaire, devient indispensable dans la technologie de production. Pour une ressource indispensable à la production, cet

8. Définissons $u = \frac{W}{Y}$ et $s = 1 - \frac{C}{Y} - \frac{W}{Y}$. À partir de (19′) et (15′), on obtient $s = \frac{\beta_1{}^2\hat{\alpha}}{\beta_1{}^2} \cdot \beta_2$. Cette relation peut être obtenue également en notant que $Z^*_\infty = \hat{K}^*_\infty = \hat{\alpha}^*_\infty$.

équilibre saute de zéro à l'infini lorsque le taux d'escompte, quand réduit continûment, atteint la valeur zéro. Ainsi, la dégénérescence de l'économie dans le cas d'un taux d'escompte positif ne peut être contrecarrée par un taux positif de progrès technique. Elle peut donc être évitée si ce taux est au moins égale au taux d'escompte.

Dans le cas d'une économie dont la technologie de production est de type Cobb-Douglas, on a trouvé un taux de progrès technique nécessaire et suffisant qui soutient une économie non dégénérée. Quand l'innovation est endogène et contrôlable à un certain coût, il a été démontré que l'économie se dirige toujours vers le « Pays de Cocagne » où règne l'abondance absolue.

Comme nous avons constaté, la variété des équilibres à long terme consiste en des points qui sautent de l'infini à zéro lorsque les paramètres passent par les points de bifurcation, à savoir ($\delta = 0, \sigma = 1, \lambda = \delta$). La variété des équilibres en forme d'hyperplan comme dans le modèle de Liavatan & Samuelson s'obtient lorsque l'on adopte une spécification plus générale de la technologie de production. On peut, par exemple, poser $Y = \alpha(t) F(K, S, S)$ comme dans Long & Kemps [10] où S désigne le stock d'une ressource non renouvelable identifié globalement comme « environnement ». Dans ce cas, l'analyse du type que propose Magill [11] est devenue indispensable.

En somme, le modèle de croissance avec ressource non renouvelable est structurellement instable même dans les cas relativement simples que nous avons considérés. Tout comme avec plusieurs phénomènes dynamiques dans les sciences naturelles (voir Casti [3]), l'aspect de stabilité structurelle dans les modèles économiques devrait être scrupuleusement examiné afin de les acheminer vers une certaine « robustesse de structure ». Cette qualité est certes requise pour faciliter la tâche de prédiction théorique.

N. M. HUNG,*
Économique, Université Laval

* J'aimerais remercier messieurs A. Haurie pour de nombreuses discussions stimulantes, M. Truchon et F. Taurand pour diverses précisions et améliorations qu'ils m'ont suggérées dans la préparation de cette version et P. Lasserre pour des commentaires pertinents. Ils sont cependant dissociés de toutes erreurs possibles.

RÉFÉRENCES

[1] ARROW, K & KURZ, M. *Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy,* John Hopkin Press, Baltimore, 1970.

[2] BROCK, W. *Some Application of Recent Results on the Asymptotic Stability of Optimal Control to the Problem of Comparing Long Run Equilibria,* Cornel University, 1976.

[3] CASTI. *Connectivity, Complexity and Catastrophe in Large Scale System,* Wiley, New York, 1979.

[4] CHIARELLA, C. *Optimal Depletion of a Non Renewable Resource When Technological Progress is Endogenuous,* dans Long, N.V. & Kemp, M. [10], 1980.

[5] DASGUPTA, P. & HEAL, G. « The Optimal Depletion of Exhaustibles Resources », dans « Symposium on the Economics of Exhaustibles Resources », *Review of Economic Studies,* 1974.

[6] DASGUPTA, P. & HEAL, G. *Economics Theory and Exhaustible Resource,* Cambridge Press, 1979.

[7] HARTWICK, J. « Intergenerationnal Equity and Investing of Rents From Exhaustible Resources », *American Economic Review,* 1977.

[8] HAURIE, A. & HUNG, N.M. « Turnpike Properties For Optimal Use of a Natural Resource », *Review of Economic Studies,* 1977.

[9] LIAVATAN, J. & SAMUELSON, P.A. « Note on Turnpikes : Stable and Unstable », *Journal of Economic Theory,* 1969.

[10] LONG, N.V. & KEMP, M., éd., *Exhaustible Resources, Optimality and Trade,* North Holland, 1980.

[11] MAGILL, M. « Some New Results on Local Stability of the Process of Capital Accumulation », *Journal of Economic Theory,* 1977.

[12] MITRA, T. « On Optimal Depletion of Exhaustible Resources : Existence and Characterization Results », *Econometrica,* 1980.

[13] ROBSON, A. « Costly Innovation and Natural Resources », *International Economic Review,* 1980.

[14] SHELL, K. « Toward a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation », *American Economic Review,* Proc. 56, pp. 62-68, 1966.

[15] SOLOW, R. « Intergenerationnal Equity and Exhaustible Resources », dans Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, *Review of Economic Studies,* 1974.

[16] STIGLITZ, J. « Growth with Exhaustible Resources : Efficient and Optimal Growth Path », dans « Symposium on the Economics of Exhaustible Resources », *Review of Economic Studies,* 1974.

[17] SUZUKI, H. « On the Possibility of Steadily Growing per Capita Consumption in an Economy with a Wasting and Non-Replewishable Resource », *Review of Economic Studies,* 1976.

[18] TAKAYAMA, A. *Optimal Technical Progress with Exhaustible Resources,* dans Long, N.V. & Kemps, M. [10], 1980.

[19] THOM, R. *Structural Stability and Morphogenesis,* Benjamin, Reading, Mass. 1975.

[20] USAWA, H. « Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth », *International Economic Review,* 1965.

[21] ZEEMAN, E.C. « The Classification of Elementary Catastrophe of a Dimension ≤ 5 », dans *Symposium on Catastrophe Theory : Seatle 1976,* Springer Verlag, New York, 1976.