

Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe

Complex tasks in mathematics – students' difficulties and open classroom discussion

Tareas complejas en matemáticas: dificultades de los alumnos y explotaciones colectivas en clase

Isabelle Demonty and Annick Fagnant

Volume 42, Number 2, Fall 2014

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1027912ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1027912ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

1916-8659 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Demonty, I. & Fagnant, A. (2014). Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe. *Éducation et francophonie*, 42(2), 173–189. <https://doi.org/10.7202/1027912ar>

Article abstract

This article focuses on complex tasks proposed in the French community of Belgium as examples of tools to assess the mathematical skills of students at the end of elementary school (grade 6). By comparing the results of two studies based on the same complex tasks (observation of students while solving the problem in small groups, and observation of teaching situations conducted in a class), the article attempts to shed light on the following questions: (a) What open classroom discussion do the teachers suggest to help the students? (b) Do they take their errors and difficulties into account? and (c) do they base their interventions on the students' most effective approaches? Overall, although the results show that the teachers base their approaches partly on the students' difficulties and use the approaches that proved most effective when students solved problems independently, they also reveal a directional guidance on the part of teachers, and an implicit as to why to choose certain approaches over others, a practice which may ultimately undermine the development of targeted skills.

Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe

Isabelle DEMONTY

Université de Liège, Liège, Belgique

Annick FAGNANT

Université de Liège, Liège, Belgique

RÉSUMÉ

Cet article s'intéresse aux tâches complexes proposées en Belgique francophone en guise d'exemples d'outils permettant d'évaluer les compétences en mathématiques des élèves en fin d'enseignement primaire (6^e année). En confrontant les résultats de deux recherches portant sur une même tâche complexe (observation d'élèves lors de la résolution de la tâche en petits groupes, d'une part, et observation de situations d'enseignement menées en groupe-classe, d'autre part), le présent article tente d'apporter un éclairage aux questionnements suivants : 1) Quelles exploitations collectives les enseignants proposent-ils pour aider les élèves ? 2) Prennent-ils en compte les erreurs et les difficultés des élèves ? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces ? Globalement, si les résultats montrent que les enseignants s'appuient partiellement sur les difficultés des élèves et sur les démarches qui se sont avérées les plus efficaces lors l'observation des élèves en situation autonome de résolution, ils révèlent également un guidage directif de la part des enseignants et un implicite quant aux raisons guidant certains choix de démarches plutôt que d'autres risquant *in fine* de ne pas suffisamment soutenir le développement des compétences visées.

ABSTRACT

Complex tasks in mathematics – students’ difficulties and open classroom discussion

Isabelle DEMONTY
University of Liège, Liège, Belgium

Annick FAGNANT
University of Liège, Liège, Belgium

This article focuses on complex tasks proposed in the French community of Belgium as examples of tools to assess the mathematical skills of students at the end of elementary school (grade 6). By comparing the results of two studies based on the same complex tasks (observation of students while solving the problem in small groups, and observation of teaching situations conducted in a class), the article attempts to shed light on the following questions: (a) What open classroom discussion do the teachers suggest to help the students? (b) Do they take their errors and difficulties into account? and (c) do they base their interventions on the students’ most effective approaches? Overall, although the results show that the teachers base their approaches partly on the students’ difficulties and use the approaches that proved most effective when students solved problems independently, they also reveal a directional guidance on the part of teachers, and an implicit as to why to choose certain approaches over others, a practice which may ultimately undermine the development of targeted skills.

RESUMEN

Tareas complejas en matemáticas: dificultades de los alumnos y explotaciones colectivas en clase

Isabelle DEMONTY
Universidad de Lieja, Lieja, Bélgica

Annick FAGNANT
Universidad de Lieja, Lieja, Bélgica

Este artículo se interesa a las tareas complejas propuestas en Bélgica francófona en guisa de ejemplos de herramientas para evaluar las competencias en matemáticas de los alumnos al terminar la educación primaria (6º grado). Al confrontar los resultados de dos investigaciones cuyo objeto era la misma tarea compleja (observación de los alumnos durante la resolución de una tarea en grupo pequeño, por una parte, y observación de situaciones de enseñanza realizadas en grupo, por otra parte), el

presente artículo trata de clarificar las cuestiones siguientes: a) ¿qué explotaciones colectivas propone los maestros para ayudar a los alumnos?; b) ¿toman en cuenta sus errores y dificultades?; y c) ¿se apoyan en procedimientos eficaces? De manera global, si los resultados muestran que los maestros se apoyan parcialmente en las dificultades de los alumnos y en procedimientos que han revelado ser efectivos durante la observación de los alumnos en situación autónoma de resolución, también muestran una orientación directiva de parte de los maestros y otra implícita en lo que se refiere a las razones que orientan la elección de ciertos procedimientos más que de otros, que corren el riesgo, *in fine*, de no obrar suficientemente en el desarrollo de las habilidades definidas.

Introduction

Depuis quelques années, le concept de compétence est au cœur des programmes d'études de nombreux pays européens (Eurydice, 2012). On attend aujourd'hui des élèves qu'ils puissent mobiliser et intégrer des ressources externes (documents authentiques et variés, comme des plans, des tarifs...) et des ressources internes (les différents types de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes dont doivent disposer les individus) pour faire face à des situations complexes et inédites (Beckers, 2012). Plusieurs recherches ont mis en évidence les difficultés importantes rencontrées par les élèves face à ces tâches complexes, particulièrement en mathématiques pour le domaine qui nous occupe (Carette, 2007; Crahay et Detheux, 2005; Fagnant, Demonty, Dierendonck, Dupont et Marcoux, 2014).

Cet article s'intéresse aux tâches complexes que propose le système scolaire belge francophone en guise d'exemples d'outils permettant d'évaluer les compétences des élèves à la fin de l'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans). En mathématiques, ces tâches complexes se présentent sous la forme de problèmes comportant plusieurs étapes de résolution et nécessitant la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel et De Corte, 2008)¹. Même si elles ont été conçues au départ pour s'insérer dans un modèle d'évaluation diagnostique « en phases » (comme le préconisent Rey, Carette, Defrance et Kahn, 2006), ces tâches complexes peuvent également être utilisées en classe dans des situations d'enseignement/apprentissage portant sur la résolution de problèmes. Lors de telles séances, les enseignants ont un rôle important à jouer pour soutenir les élèves dans

1. Verschaffel et De Corte (2008) envisagent la résolution de problèmes comme un processus complexe de modélisation mathématique impliquant la construction d'une représentation du problème (ou d'un modèle de situation); la modélisation de cette représentation sous une forme mathématique (ou la construction d'un modèle mathématique); la mise en œuvre de ce modèle en vue d'obtenir un résultat mathématique qui devra être interprété et évalué en référence au modèle de situation, avant d'être communiqué de façon à répondre à la question posée. Ce modèle n'est pas linéaire et de nombreux allers-retours entre les différentes étapes peuvent être envisagés tout au long du processus de résolution.

le développement des compétences requises pour appréhender et résoudre efficacement ce type de tâches. Mais comment s'y prennent-ils pour exploiter en classe ces tâches complexes de mathématiques? Plus précisément: 1) Quelles exploitations collectives proposent-ils pour aider les élèves? 2) Prennent-ils en compte leurs erreurs et leurs difficultés? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces?

Pour tenter d'éclairer ces questionnements, cet article se propose de mettre en perspective les résultats de deux études portant sur une même tâche complexe de mathématiques. La première étude (Demonty, Dupont et Fagnant, 2014) cherchait à mieux comprendre la façon dont les élèves appréhendent la tâche complexe, les démarches qu'ils adoptent et les principales difficultés qu'ils rencontrent. S'appuyant sur une observation de situations d'enseignement/apprentissage en classe, la deuxième étude (Fagnant, Dupont et Demonty, à paraître) cherchait à observer la manière dont les enseignants exploitent ce type de tâches complexes au cours des moments collectifs en classe.

Éclairage théorique

S'inscrivant dans la logique des questionnements soulevés en introduction, l'éclairage théorique abordera succinctement deux volets: le premier s'intéresse à l'exploitation collective des tâches complexes, alors que le second aborde la question de la prise en compte des démarches et des difficultés des élèves.

Exploitation collective des tâches complexes

Une étude réalisée par Ginsburg, Cooke, Leinwand et Pollock (2005) dans 12 pays ayant participé à PISA et TIMSS en 2003 montre qu'une démarche classique d'enseignement consiste à procéder à une analyse collective des problèmes proposés aux élèves avant de laisser ces derniers gérer les aspects plus techniques de la résolution. Les auteurs ont constaté que les élèves les plus faibles éprouvent des difficultés spécifiques à mettre en œuvre des processus cognitifs de haut niveau (capacité à raisonner ou à résoudre des problèmes) et ils font l'hypothèse que ces déficiences seraient en partie attribuables aux opportunités limitées qui leur sont offertes de réaliser ce type de tâches dans les cours de mathématiques.

D'après Monnier et Amade-Escot (2009), cette tendance serait particulièrement marquée dans les classes accueillant des élèves faibles où «les gestes professoraux se traduisent par un éclatement des contenus enseignés sous forme de microtâches très individualisées et une absence de phase d'institutionnalisation des savoirs» (p. 60). Ainsi, même si les tâches proposées devraient faire appel à des demandes cognitives élevées, les enseignants ont tendance à les décomposer en sous-problèmes permettant aux élèves d'appliquer les procédures requises, sans que le type de raisonnement à mettre en œuvre fasse réellement l'objet d'un enseignement explicite.

Julo (1996, 2002) va dans le même sens en mettant en doute l'efficacité de telles pratiques d'enseignement. En orientant les démarches de résolution par une décomposition des tâches complexes ou en palliant les difficultés ponctuelles par des

consignes spécifiques, on pense le problème à la place de l'élève et on le conduit à ne travailler que les aspects procéduraux de la démarche. Or, les difficultés des élèves se situent en amont, et ce sont des aides centrées sur l'élaboration d'une représentation pertinente du problème qu'il conviendrait plutôt d'envisager.

Ces divers constats rejoignent largement ceux mis en évidence par les sociologues français, notamment par les travaux de Bonnery (2007, 2009) et la notion de « cadrage », à la fois trop large et trop étroit, qu'il a largement documentée dans diverses disciplines scolaires. L'auteur a ainsi montré comment l'enseignant, par des aides ponctuelles fournies aux élèves pour qu'ils accomplissent les tâches proposées, parvient à donner à chacun (aux élèves et à lui-même) l'illusion d'une construction collective de connaissances (ou du développement de compétences), alors qu'en réalité certains élèves sont complètement « passés à côté » des enjeux de l'apprentissage visé. Certains dispositifs didactiques se caractériseraient ainsi par un cadrage à la fois « trop large », entretenant un certain flou sur les objectifs poursuivis, sur les démarches à mettre en œuvre et sur les savoirs en jeu, et « trop étroit », donnant des consignes qui conduisent à décomposer les tâches complexes en mini-tâches, permettant ainsi aux élèves de dépasser des difficultés ponctuelles, mais ne les amenant pas *in fine* à cerner les enjeux cognitifs de la tâche globale.

Prise en compte des démarches et des difficultés des élèves

Comme on l'a vu, une analyse collective du problème risque de faire passer les élèves à côté des enjeux de l'apprentissage. Dans le même ordre d'idées, des « aides » trop ciblées sur la réalisation de la tâche, ou trop « guidées » par les étapes à réaliser pour la résoudre, risquent de permettre aux élèves de « réussir » la tâche sans pour autant contribuer au développement des compétences visées. Mais, que ce soit pour organiser cette analyse collective, pour penser ces « aides ponctuelles » ou, mieux encore, pour pouvoir réagir adéquatement aux balbutiements de démarches proposées par les élèves, comment les enseignants procèdent-ils ?

Pour œuvrer au développement des compétences visées, il est important que les enseignants disposent de connaissances leur permettant d'anticiper les compréhensions, mais aussi les incompréhensions spécifiques de leurs élèves. Or, traditionnellement, la formation initiale des enseignants vise le développement d'une base de connaissances solide et de capacités pédagogiques générales, sorte de « bon sens » qui les amène à réagir de manière appropriée lorsqu'ils sont devant une classe (Sliver, 2009). C'est dans cette perspective que sont pensées bon nombre de formations d'enseignants qui consistent à amener les futurs enseignants à avoir une bonne maîtrise des contenus tout en les plongeant rapidement dans les classes pour qu'ils effectuent leurs stages d'enseignement.

En comparant les connaissances possédées par des enseignants de mathématiques d'écoles américaines et chinoises, Silver (2009) met en évidence que les enseignants compétents maîtrisent les contenus mathématiques et qu'ils exploitent ceux-ci avec leurs élèves en étant capables d'envisager les « demandes cognitives » que l'acquisition de ceux-ci nécessite. Cet éventail de connaissances (qui s'approche de la notion de *pedagogical content knowledge* mise en évidence par Schulman dans

les années 1980; voir notamment Crahay *et al.*, 2010; van der Sandt, 2007) recouvre trois facettes interreliées : 1) les aspects clés liés au contenu (les idées mathématiques centrales recouvertes par le contenu ainsi que leurs domaines de validité); 2) les obstacles cognitifs que les élèves risquent de rencontrer dans les situations mobilisant ces contenus (communément appelées erreurs, incompréhensions des élèves); 3) les points charnières, c'est-à-dire les stratégies d'enseignement ou les activités susceptibles d'aider les élèves à dépasser les obstacles cognitifs pour pouvoir comprendre en profondeur les aspects clés des idées mathématiques ainsi que leur domaine de validité. C'est essentiellement à la troisième facette que nous allons nous intéresser ici, en cherchant à repérer non seulement les erreurs des élèves et les difficultés qu'ils rencontrent, mais en identifiant aussi les démarches qui semblent s'avérer les plus efficaces.

Éclairage empirique appuyé sur une confrontation entre deux études exploratoires

Pour éclairer les divers questionnements soulevés dans cet article, nous appuyons nos propos sur deux études qui impliquaient l'exploitation de la même tâche complexe avec des élèves de dernière année de l'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans). Dans les deux études, la tâche complexe a été proposée aux élèves comme une situation cible au sens de Roegiers (2007), c'est-à-dire une situation problème demandant aux élèves de réinvestir et d'intégrer un ensemble de concepts et de procédures censés avoir été préalablement acquis.

Cette partie est organisée en trois volets : une présentation de la tâche complexe exploitée, quelques résultats issus de la première étude permettant de pointer les erreurs, difficultés et démarches efficaces face à la réalisation de cette tâche complexe et, enfin, quelques résultats d'une seconde étude permettant d'éclairer certains aspects des pratiques des enseignants. Les deux études se déroulent dans des classes différentes. L'approche méthodologique adoptée dans cet article consiste donc à considérer que les difficultés et les démarches les plus fréquemment observées dans la première étude sont significatives et permettent dès lors d'éclairer les résultats observés dans la seconde étude.

La tâche complexe exploitée

La tâche complexe intitulée «Côté cour, côté jardin» a été choisie parmi les exemples d'outils d'évaluation proposés sur le site du ministère de l'Enseignement pour les élèves de ce niveau scolaire. Elle se trouve en annexe 1.


Dans cette tâche, il s'agit de calculer le coût total de l'aménagement d'un espace et de vérifier si l'association de parents dispose d'assez d'argent pour réaliser ce projet. La tâche comporte quatre sous-problèmes, assez aisément identifiables dans le descriptif de la tâche grâce aux quatre tirets permettant de les énoncer un à un. Chaque sous-problème constitue en lui-même une tâche relativement complexe qui nécessite de mobiliser plusieurs savoirs et savoir-faire mathématiques et d'exploiter

des ressources externes (un plan du jardin à aménager – ce plan est présenté à l'échelle 1:100) et un tarif permettant de calculer le prix du matériel de jardin; les élèves peuvent aussi avoir recours à leurs instruments de mesure habituels et à une calculatrice).

Dans le cadre de cet article, nous nous focaliserons sur les sous-problèmes 2 et 3, parce que ceux-ci ont posé d'importantes difficultés aux élèves lors de l'étude 2 et qu'ils ont donné naissance à une variété de démarches de résolution.

Le **sous-problème 2** se présente comme un problème d'intervalle où il s'agit de déterminer le nombre de forsythias à prévoir, sachant qu'il faut les planter en ligne et les espacer d'un mètre, le tout sur une distance de 10 mètres, sachant qu'il faut placer une fleur à chaque extrémité. Parmi les divers documents dont ils disposent, les élèves doivent sélectionner les informations reprises dans la figure 1.

Figure 1. Informations nécessaires à la résolution du sous-problème 2

Extrait du plan	Extrait du tarif	Extrait de l'énoncé
 <p>Remarque: Aucune mesure n'apparaissait sur le plan. Nous avons indiqué les mesures pour faciliter la compréhension des démarches de résolution possibles.</p>	Forsythia: 6,95 € la pièce	<p>Calculer le coût du travail suivant:</p> <p>Planter une rangée de forsythias qui doivent être espacés d'un mètre l'un de l'autre.</p>

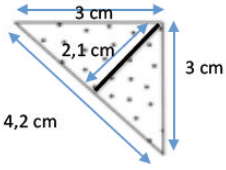
La première démarche consiste à placer une règle graduée sur le parterre représenté sur le plan et à indiquer par un point la position de chaque plante sur le plan (faire un point à chaque centimètre), sachant que les première et dernière plantes sont déjà représentées sur le plan. Il s'agit ensuite de compter le nombre de plantes représentées (11).

La deuxième démarche envisagée se base sur le mesurage de la distance entre les deux plantes situées aux extrémités (soit 10 cm). Elle conduit à déduire qu'il faudra planter 11 fleurs, puisqu'il y en a une à chaque extrémité.

Dans les deux cas, une fois le nombre de forsythias trouvé, il s'agit de déterminer le prix, sachant qu'un forsythia coûte 6,95 €.

Le **sous-problème 3** demande de planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire, puis de calculer le prix de l'achat nécessaire, sachant que ces fleurs sont vendues en paquets de 15. Le terrain à couvrir a la forme d'un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent chacun 3 m. Les élèves doivent s'appuyer sur les informations reprises dans la figure 2.

Figure 2². Informations nécessaires à la résolution du sous-problème 3

Extrait du plan	Extrait du tarif	Extrait de l'énoncé
 <p>Remarque : Aucune mesure n'apparaissait sur le plan. Nous avons indiqué les mesures pour faciliter la compréhension des démarches de résolution possibles.</p>	Narcisse : 5,95 € le paquet de 15	<p>Calculer le coût du travail suivant :</p> <p>Planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire.</p>

Pour résoudre ce problème, il s'agit d'abord de calculer l'aire du triangle (soit en pavant la surface par des carrés d'un mètre de côté, soit en appliquant la formule de calcul d'aire du triangle). Pour appliquer le calcul d'aire, les élèves doivent choisir une base (soit un côté de l'angle droit, soit l'hypoténuse) et une hauteur correspondant à la base choisie. Selon le choix effectué, ils seront confrontés à des mesures entières (3 cm pour la base et pour la hauteur dans le premier cas), soit à des mesures décimales risquant d'engendrer une certaine imprécision de la mesure. Dans le premier cas, on obtient une aire de $4,5 \text{ cm}^2$; dans le second cas, l'aire obtenue est comprise entre 4 cm^2 et $4,4 \text{ cm}^2$. Il faut ensuite prévoir de planter 20 fleurs par mètre carré de terrain et donc multiplier l'aire trouvée à l'étape précédente par 20 pour déterminer le nombre de fleurs à acheter. Les fleurs se vendent en paquets de 15 pièces. Si les élèves ont obtenu une aire égale à $4,5 \text{ m}^2$, la règle de 3 mène au constat qu'il faut acheter 90 pièces, donc 6 paquets. En revanche, si les élèves ont obtenu une aire égale à $4,3 \text{ m}^2$ par exemple, il faut qu'ils réalisent une étape supplémentaire pour acheter un nombre entier de paquets de fleurs (en prenant en compte le fait que les fleurs se vendent par paquets de 15, il faut acheter 6 paquets, donc 90 narcisses, même si on n'a besoin que de 86 fleurs par exemple).

L'observation des démarches et des difficultés des élèves face à la tâche complexe

La première recherche visait à appréhender les démarches des élèves face à la résolution de cette tâche à travers l'observation d'une activité de résolution en petits groupes. Vingt et un groupes de trois élèves ont été observés; les échanges ont été filmés et les interactions ont été retranscrites (pour en savoir plus, voir Demonty *et al.*, 2014).

Pour le **sous-problème 2**, le calcul du coût n'a posé aucune difficulté aux élèves (les fleurs se vendant à la pièce), mais la détermination du nombre de fleurs à acheter a été problématique pour plusieurs. Les deux erreurs les plus fréquentes consistaient à mesurer la longueur du parterre, puis à considérer qu'il fallait 10 fleurs (puisque la

- On s'attend ici à ce que les élèves reconnaissent visuellement le triangle comme étant un triangle rectangle. Le problème ne demande pas que les élèves reconnaissent qu'il est isocèle, mais ils peuvent éventuellement procéder à une mesure des deux côtés de l'angle droit et ainsi constater que les côtés ont la même longueur.

longueur séparant les deux extrémités était de 10 mètres et qu'il convenait d'espacer les fleurs d'un mètre) ou 12 fleurs (car la longueur totale du parterre où ces fleurs allaient être plantées était de 12 mètres ou parce qu'ils ont mesuré 10 cm, puis ajouté 2 fleurs aux extrémités)³.

Un constat intéressant est que les groupes ne sont parvenus à une solution correcte que lorsque la démarche de dénombrement avait été envisagée (en dessinant un rond à chaque centimètre environ ou en utilisant une latte pour marquer ces centimètres); les démarches s'appuyant uniquement sur un mesurage de la distance séparant les deux extrémités, sans procéder à un dénombrement du nombre de fleurs, ont conduit tous les groupes à une solution erronée (généralement en s'appuyant sur un achat de 10, voire de 12 fleurs).

Pour le **sous-problème 3**, deux difficultés principales sont apparues : la nécessité de calculer l'aire du parterre (plusieurs groupes ont pensé qu'il fallait prévoir 20 narcisses en tout et non par mètre carré), et le calcul du coût des narcisses qui étaient vendus par paquets de 15.

Dans ce problème impliquant un calcul de l'aire d'un triangle isocèle rectangle, la prise même des mesures sur la figure semble déterminante pour obtenir la réponse correcte : les groupes qui ont choisi comme base du triangle l'hypoténuse ont obtenu une réponse incorrecte dans dix cas sur onze. À l'inverse, ceux qui ont choisi un côté de l'angle droit comme base ou qui ont procédé à un dénombrement ont, dans tous les cas, obtenu la réponse correcte. Ce contraste de réussite s'explique par le fait que seule la seconde procédure aboutissait à une commande de 90 narcisses, qui est un multiple de 15. Comme indiqué dans l'analyse *a priori*, une fois ce nombre trouvé, il suffisait de commander les 6 caisses de 15, sans devoir se poser la question d'arrondir la commande de fleurs au multiple de 15 supérieur. L'observation des élèves a révélé une autre procédure efficace : certains élèves ont calculé le prix « théorique » de 20 narcisses en appliquant une règle proportionnelle au départ du prix des 15 narcisses, puis ont multiplié ce prix par l'aire du triangle. Avec une aire de 4,5 m², correspondant exactement à 20 narcisses, cette procédure fonctionne, mais avec une autre valeur de l'aire elle conduit à transgresser la contrainte de l'achat en caisses de 15.

L'observation des démarches mises en œuvre par des enseignants lors de l'exploitation de la même tâche complexe dans d'autres classes

La seconde étude s'est déroulée dans cinq classes du même niveau scolaire. Les enseignants avaient reçu la tâche complexe et étaient invités à exploiter celle-ci avec leurs élèves en toute liberté quant à la méthodologie qu'ils souhaitaient utiliser. Dans toutes les classes, les enseignants ont procédé à une phase de mise au travail consistant à présenter la tâche complexe aux élèves, suivie d'une phase de résolution,

3. D'autres erreurs moins fréquentes ont consisté à estimer qu'il fallait 5 fleurs (en considérant que la distance d'un mètre à prévoir entre deux fleurs correspondait en réalité à un mètre de chaque côté de la fleur – $10 \div 2 = 5$), 6 fleurs (par un raisonnement analogue au précédent au départ d'une longueur de 12 mètres – $12 \div 2 = 6$ – ou par l'ajout d'une fleur, puisqu'il fallait prévoir une fleur à chaque extrémité – $10 \div 2 = 5$ et $5 + 1 = 6$) ou même 4 fleurs (en plaçant une fleur tous les deux mètres et en ne prenant en compte aucune des deux extrémités – les fleurs étant placées à 2, 4, 6 et 8 m).

organisée en individuel ou en petits groupes, puis d'une phase de mise en commun / correction, à nouveau collective (pour en savoir plus, voir Fagnant *et al.*, à paraître).

Dans le présent article, nous allons nous centrer sur les deux moments collectifs en vue d'éclairer les questionnements mentionnés en introduction de l'article.

Lors de **l'étape de mise au travail**, les interventions des enseignants se situent à un niveau très général et portent sur la présentation de la tâche globale (lecture des consignes), sur l'exploitation des documents mis à disposition (présentation du plan et du tarif), voire sur les modalités du travail de groupe (importance de justifier ses démarches auprès des autres élèves). Un enseignant a procédé d'emblée à une analyse collective de chacun des sous-problèmes en guidant les élèves vers l'identification des éléments importants du problème et en les orientant vers les stratégies à mettre en œuvre pour résoudre les sous-problèmes: pour le sous-problème 2, l'enseignant amène les élèves à trouver les données pertinentes à prendre en compte (on doit placer une fleur à chaque extrémité et espacer les fleurs d'un mètre; il faut également veiller à respecter l'échelle du plan). Pour le sous-problème 3, il mentionne une donnée essentielle du problème (planter 20 fleurs par mètre carré) et précise qu'il faut calculer l'aire d'un triangle en rappelant la formule à utiliser.

Un deuxième enseignant a procédé de façon un peu similaire, mais en interrompant cette fois la phase de travail après un premier temps de recherche, l'ayant conduit à constater que de nombreux élèves semblaient en difficulté. Comme dans la classe mentionnée précédemment, l'enseignant guide l'analyse du problème et oriente les démarches de résolution à mettre en œuvre: pour le sous-problème 2, il attire explicitement l'attention des élèves sur une stratégie efficace en leur demandant de dénombrer les fleurs; pour le sous-problème 3, il les informe qu'il va falloir calculer l'aire du triangle, sans toutefois orienter la réflexion sur les longueurs à mesurer.

Lors de la mise en commun / correction, les interventions concernant les sous-problèmes sont généralement très directives et se résument globalement à guider les élèves vers la démarche de résolution que l'enseignant semble avoir lui-même choisie de privilégier. Un extrait de verbatim, en annexe 2, permet d'illustrer nos propos.

Pour le sous-problème 2, les enseignants valorisent généralement la démarche de dénombrement pour trouver le nombre de fleurs à planter, alors qu'ils sont plusieurs à ne pas accepter un dénombrement pour le calcul de l'aire dans le sous-problème 3 (démarche sans doute jugée trop informelle à ce niveau d'enseignement, l'application de formules ayant fait l'objet d'un enseignement explicite). Lorsqu'ils orientent le calcul de l'aire dans le sous-problème 3, les enseignants conduisent généralement les élèves à s'appuyer sur la mesure des deux côtés de l'angle droit. Les motivations qui les incitent à privilégier cette démarche restent néanmoins du domaine de l'implicite dans toutes les classes. Pourtant, ces choix ont des implications non seulement quant à la résolution du problème, mais aussi quant aux objets de discussion en classe. Ainsi, la procédure de calcul d'aire privilégiée empêche le questionnement relatif à l'arrondi du nombre de caisses à l'unité supérieure. Le guidage de la suite de la résolution conduit aussi à calculer le nombre de narcisses nécessaires avant de calculer le nombre de caisses à acheter. Cela permet d'éviter la

démarche consistant à calculer d'abord le prix de 20 narcisses (sans tenir compte de la contrainte d'une vente en caisse de 15) pour le multiplier ensuite par l'aire du triangle. Mais cela empêche aussi de discuter de l'adéquation ou non de cette façon de procéder en référence aux contraintes de l'énoncé.

Discussion et conclusion

S'appuyant sur une tâche complexe de mathématiques élaborée pour des élèves de fin d'enseignement primaire (6^e année, élèves de 11-12 ans), l'article s'est intéressé à la façon dont les tâches complexes sont exploitées en classe par les enseignants : 1) Quelles exploitations collectives les enseignants proposent-ils pour aider les élèves? 2) Prennent-ils en compte les erreurs et les difficultés des élèves? 3) S'appuient-ils sur leurs démarches efficaces?

Globalement, les interventions collectives des enseignants anticipent certaines difficultés rencontrées par les élèves face aux sous-problèmes à résoudre (p. ex. : trouver le nombre de narcisses dans le sous-problème 2 et calculer l'aire du triangle dans le sous-problème 3). Il semble aussi que ces interventions orientent les élèves vers les stratégies qui s'avèrent les plus efficaces pour résoudre les problèmes posés. Ces « guidages » se font souvent de manière très directive (incitation à utiliser la stratégie de dénombrement pour le sous-problème 2 et à calculer l'aire en s'appuyant sur la mesure des côtés de l'angle droit pour le sous-problème 3 par exemple), mais sans explicitation des raisons ayant présidé à la valorisation de cette démarche plutôt que d'une autre. Les exploitations collectives étant très guidées par l'enseignant, que ce soit au moment de la mise au travail ou lors de la mise en commun, cette façon de procéder ne conduit toutefois pas à la prise en compte de toutes les erreurs et difficultés spécifiques rencontrées dans la première étude (par exemple, l'orientation vers le dénombrement pour le sous-problème 2 conduit à éviter certaines erreurs, tout comme l'orientation vers le calcul de l'aire appuyé sur les mesures des côtés de l'angle droit permet d'éviter de rencontrer le problème d'approximation de mesures ainsi que celui nécessitant d'arrondir la commande à l'unité supérieure).

Au vu de ces résultats, il semble que l'on peut considérer que les enseignants s'appuient partiellement sur les difficultés rencontrées par les élèves et qu'ils parviennent globalement à les orienter vers des démarches efficaces. S'ils disposent sans doute d'une certaine capacité à envisager les obstacles cognitifs que les élèves rencontrent dans la résolution de cette tâche complexe (Silver, 2009), leur façon de procéder empêche aussi que certaines erreurs ou difficultés potentielles ne soient érigées en objet de discussion. Or, les observations centrées sur les stratégies des élèves recueillies dans la première recherche nous amènent à penser que ces débats auraient été déterminants pour permettre à bon nombre d'élèves d'aboutir, à partir de leurs stratégies spontanées, à des résolutions plus efficaces des problèmes proposés.

Par ailleurs, à l'instar de Ginsburg *et al.* (2005) ou de Bonnery (2007, 2009), nous avons aussi constaté un guidage assez directif et des opportunités limitées offertes aux élèves pour qu'ils identifient eux-mêmes les nœuds spécifiques de difficultés

relatifs aux différentes étapes de la tâche à résoudre. Dans certains cas, les interventions des enseignants ont lieu avant même que les difficultés ne se posent réellement aux élèves, puisque la tâche est déjà très orientée dès qu'elle leur est présentée (analyse collective du but, exploitation des documents mis à disposition, décomposition en sous-problèmes... et même parfois analyse détaillée de chacun d'eux). Lors de la phase de correction, la plupart des interventions des enseignants orientent les élèves vers la démarche que l'enseignant a choisi de privilégier.

Le guidage directif des enseignants pourrait traduire leur souci d'amener les élèves à s'approprier le « cadrage instruit » que nécessite la résolution de telles tâches complexes (Carette, 2007). Cette façon de procéder pourrait avoir une certaine efficacité dans la mesure où le guidage est bien orienté vers les démarches efficaces. Toutefois, ce type d'intervention ne faisant généralement l'objet d'aucune justification (en tout cas dans les moments de travail collectif), on peut craindre que sa portée soit limitée. Pour paraphraser les propos de Cèbe, Pelgrims et Martinet (2009), cela reviendrait à ne pas enseigner explicitement à tous ce que l'école exige de tous, « tout en exigeant de tous ceux qu'elle accueille qu'ils aient ce qu'elle ne leur donne pas » (p. 48). On peut en effet craindre que les interventions des enseignants révèlent un guidage à la fois (trop) directif dans la résolution de ces tâches et (trop) implicite quant aux raisons guidant certains choix de démarches plutôt que d'autres. Pour le dire autrement, on pourrait évoquer un cadrage à la fois « trop étroit », conduisant à décomposer le problème en microtâches requérant simplement d'appliquer les procédures identifiées, et « trop large », peu susceptible d'aider les élèves à cerner les enjeux réels des apprentissages et risquant *in fine* de ne pas suffisamment œuvrer au développement des compétences visées (Bonnery, 2007 et 2009).

L'approche proposée dans cet article, consistant à confronter les résultats de deux recherches menées dans des classes différentes au départ d'une même tâche complexe, comporte nécessairement certaines limites, liées notamment à l'hypothèse de départ selon laquelle les difficultés et les démarches observées dans l'étude 1 étaient suffisamment significatives pour éclairer les quelques résultats exploités dans l'étude 2. D'autres erreurs, difficultés et démarches sont sans doute apparues dans les classes observées, mais force est de constater que celles-ci semblent avoir peu influencé la gestion des phases collectives par les enseignants, puisque ceux-ci les « dirigent » en suivant la logique de leur propre démarche de résolution plutôt qu'en partant d'une confrontation des démarches et des solutions des élèves. Évidemment, nos analyses n'ont porté que sur les moments collectifs, et c'est sans doute durant la phase de travail individuel ou en petits groupes que les interactions enseignant-élèves ont pu porter davantage sur des démarches et des erreurs spécifiques. Cette problématique pourrait aussi être éclairée en interrogeant les enseignants sur leur analyse *a priori* de l'activité, puis sur la façon dont ils estiment *a posteriori* avoir pu gérer leur séquence en prenant en compte les erreurs, difficultés et démarches initialement identifiées, mais aussi celles rencontrées dans « le feu de l'action » et nécessitant une régulation en direct. Pour rappel, la tâche complexe proposée est issue d'un outil d'évaluation de compétences en trois phases, inspiré du modèle de Rey *et al.* (2006). Dans le cadre de la présente recherche, seule la tâche complexe a été

proposée aux enseignants, mais il serait intéressant de voir, dans une recherche future, si une consultation du dossier enseignant, comprenant notamment les critères de correction de la tâche complexe, mais aussi les deux autres phases de l'outil, pourrait ou non influencer leurs pratiques didactiques.

Finalement, que l'on adhère ou non à l'approche par compétences dont les tâches complexes analysées dans cet article découlent en droite ligne, il est intéressant de constater que, dans la situation analysée, les difficultés principales des élèves ne se situent pas tant dans la gestion de la complexité elle-même (exploitation des ressources externes, décomposition de la tâche complexe en sous-problèmes...) que dans la résolution de chacun des sous-problèmes singuliers. Autrement dit, on retombe alors sur une question qui a déjà fait couler beaucoup d'encre et qui porte sur les différentes façons d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes (Demonty, Fagnant et Lejong, 2004; Verschaffel et De Corte, 2008), sans leur proposer des aides qui court-circuitent le travail nécessaire à la construction d'une représentation efficace du problème (Julo, 2002) et sans leur enseigner des méthodes générales dépouillées des contenus auxquels elles s'appliquent (Houdement, 2003).

Références bibliographiques

- BECKERS, J. (2012). Introduction et mise en perspective théorique. Dans J. Beckers, J. Crinon et G. Simons (dir.), *Approche par compétences et réduction des inégalités d'apprentissage entre élèves. De l'analyse des situations scolaires à la formation des enseignants* (p. 7-16). Bruxelles : De Boeck.
- BONNERY, S. (2007). *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficulté et dispositifs pédagogiques*. Paris : La Dispute.
- BONNERY, S. (2009). Scénarisation des dispositifs pédagogiques et inégalités d'apprentissage. *Revue française de pédagogie*, 167, 13-23.
- CARETTE, V. (2007). L'évaluation au service de la gestion des paradoxes liés à la notion de compétence. *Mesure et évaluation en éducation*, 30(2), 49-71.
- CARETTE, V. (2008, 2011). Les caractéristiques des enseignants efficaces en question. *Revue française de pédagogie*, 162, 81-93. [Article republié dans *Éducation et Formation*, e-296, 2011, p. 71-83].
- CÈBE, S., PELGRIMS, G. et MARTINET, C. (2009). Quelles pratiques d'enseignement pour les élèves en difficulté d'apprentissage? Dans G. Chapelle et M. Crahay (dir.), *Réussir à apprendre* (p. 47-57). Paris : Presses universitaires de France.
- CRAHAY, M. et DETHEUX, M. (2005). L'évaluation des compétences, une entreprise impossible? Résolution de problèmes complexes et maîtrise de procédures mathématiques. *Mesure et évaluation en éducation*, 28(1), 57-78.

- CRAHAY, M., WANLIN, P., ISAIEVA, E. et LADURON, I. (2010). Fonctions, structuration et évolution des croyances (et connaissances) des enseignants. Une revue critique de la littérature anglo-saxonne. Note de synthèse. *Revue française de pédagogie*, 172, 85-129.
- DEMONTY, I., DUPONT, V. et FAGNANT, A. (2014). Analyse des régulations interactives entre élèves lors de la résolution d'un problème mathématique en groupe. *Les cahiers des sciences de l'éducation*, 36, 175-214.
- DEMONTY, I., FAGNANT, A. et LEJONG, M. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème! Outil méthodologique à l'usage des enseignants (8-10 ans)*. Bruxelles : De Boeck.
- EURYDICE (2012). *Developing Key Competences at School in Europe: Challenges and Opportunities for Policy*. Eurydice Report. Luxembourg : Publications Office of the European Union.
- FAGNANT, A., DEMONTY, I., DIERENDONCK, C., DUPONT, V. et MARCOUX, G. (2014). Résolution de tâches complexes, évaluation « en phases » et compétence en mathématiques. Dans C. Dierendonck, B. Rey et E. Loarer (dir.), *L'évaluation des compétences en milieu scolaire et en milieu professionnel* (pp. 179-189). Bruxelles : De Boeck.
- FAGNANT, A., DUPONT, V. et DEMONTY, I. (à paraître). Régulation interactive et résolution de tâches complexes en mathématiques. Dans L. Mottier Lopez et W. Tessaro (dir.) *Le jugement professionnel, au cœur de l'évaluation et de la régulation des apprentissages des élèves*. Ouvrage soumis pour publication suite au colloque REE, Genève, septembre 2013.
- GINSBURG, A., COOKE, G., LEINWAND, S. et POLLOCK, E. (2005). *Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from 2003 TIMSS and PISA*. Washington, DC : American Institute for Research.
- HOUEMENT, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, 7-23.
- JULO, J. (1996). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N*, 69, 31-52.
- MONNIER, N. et AMADE-ESCOT, C. (2009). L'activité didactique empêchée : un outil d'intelligibilité de la pratique enseignante en milieu difficile. *Revue française de pédagogie*, 168, 59-73.
- REY, B., CARETTE, V., Defrance, A. et KAHN, S. (2006). *Les compétences à l'école. Apprentissage et évaluation* (2^e éd.). Bruxelles : De Boeck.
- ROEGIER, X. (2007). *Des situations pour intégrer les acquis scolaires*. Bruxelles : De Boeck.

- SILVER, E. A. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: What might we learn? *The International Journal of Mathematics Education*, 41, 827-832.
- VAN DER SANDT, S. (2007). Research framework on mathematics teacher behaviour: Koehler and Grouws' framework revisited. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 3(4), 343-350.
- VERSCHAFFEL, L. et DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (2^e éd.) (p. 153-176). Bruxelles : De Boeck.

Annexe 1

La tâche complexe « Côté cour, côté jardin », proposée par la Commission d'outils d'évaluation (<http://www.enseignement.be>)

Côté cour, côté jardin

Contexte

Des élèves projettent d'aménager l'espace autour du bac à sable.
Sur les conseils d'un papajardinier, ils décident de :

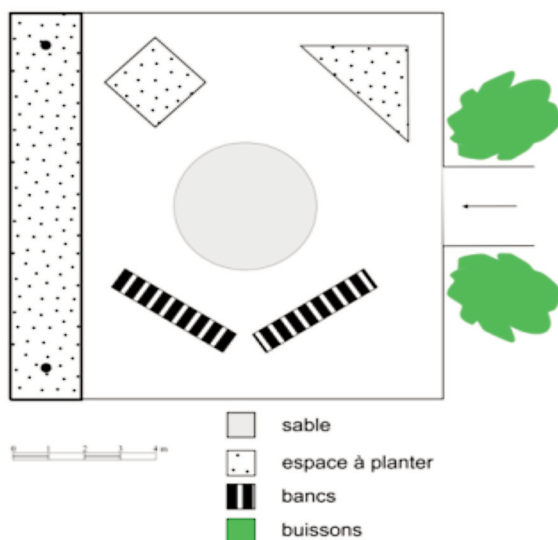
- planter 20 lavandes dans un parterre de forme carrée,
 - planter une rangée de forsythias qui doivent être espacés d'un mètre l'un de l'autre.
- Pour t'aider, les deux trous des extrémités ont été représentés.*
- planter 20 narcisses par mètre carré dans un parterre de forme triangulaire,
 - placer autour du bac à sable une bordure en bois qui dépasse du sol de 20 cm.

L'association des parents de l'école offre un budget de 185 € pour ce projet.

Tâche

Vérifie si la somme offerte par l'association des parents est suffisante pour réaliser le projet.
Justifie ta réponse par des calculs.

Plan de l'espace à aménager



Extrait du tarif

Articles	Prix
Arbustes	
Amélanchier	11,80 € la pièce
Deutzia	6,50 € la pièce
Forsythia	6,95 € la pièce
Salix	9,95 € la pièce
Spirée	7,00 € la pièce
Fleurs	
Amaryllis	11,95 € la pièce
Gaillarde	10,95 € le paquet de 5
Iris	5,95 € le paquet de 25
Lavande	4,95 € le carton de 5
Lis	8,50 € le paquet de 8
Narcisse	5,95 € le paquet de 15
Œillet	8,85 € le paquet de 6

Rouleaux de bordure en bois



L : 180 cm H : 30cm

4,70 €

Annexe 2

Illustration d'un « guidage directif » lors de la mise en commun

Guidage directif visant à orienter la démarche de résolution vers une démarche informelle (sous-problème 2) ou vers une démarche plus formelle (sous-problème 3)	
<p>Sous-problème 2</p> <p>P. « Qu'est-ce qu'on doit faire? »</p> <p>E1. « Planter une rangée de forsythias. »</p> <p>P. « Allez, vas-y... Planter une rangée de forsythias qui doivent être?... espacés?... »</p> <p>E1. « D'un mètre l'un de l'autre et y'en aura deux. »</p> <p>P. « Pout t'aider, les deux trous des extrémités ont été représentés, alors montre un peu » [...] Donc, quand vous lisez un plan, l'espace à aménager, il faut essayer de le comprendre. Pour comprendre, on regarde la...? »</p> <p>Plusieurs élèves: « Légende »</p> <p>[...]</p> <p>P. « Combien on peut mettre de forsythias entre ces deux points-là en sachant que... Regarde l'échelle. Lis un peu l'échelle. » [...]</p> <p>« Il y a un mètre d'écart et c'est combien de cm? » [...] <i>[S'ensuit une explication sur l'échelle et une incitation à mesurer.]</i></p> <p>« Tu as combien entre les deux trous? »</p> <p>E3. « 10 »</p> <p>P. « 10 [...] donc, de là à là, tu as 10 cm. Donc ici tu vas en mettre combien? On va voir... 1 cm, j'en mets 1, je suis à...? »</p> <p>E. « 3 cm »</p> <p>P. « 2 cm, c'est chaque fois 1 cm entre, hein? Je suis à 2. Donc 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et là, c'est le trou. J'en ai mis combien entre? J'en ai 9, mais plus les deux des extrémités, ça fait? Onze trous. Ok? J'ai 11 trous. Qui avait trouvé 11 trous? Donc, tous ceux qui n'ont pas trouvé 11 trous, ils n'ont pas la bonne réponse. Donc je dois planter combien de forsythias? 11, 11 forsythias à planter.... »</p>	<p>Sous-problème 3</p> <p>P. « Oui, je vois ce que tu veux dire. Donc, tu as ton triangle. Je vais le quadriller. C'est ça? »</p> <p>E. « Oui. »</p> <p>P. « Mais le problème c'est que, si je fais un quadrillage, ça c'est un carré? [...] Le problème, c'est que vous utilisez des choses qui sont non conventionnelles. Donc, qu'est-ce que je pourrais utiliser pour savoir la surface de tout cela? »</p> <p><i>Aucun élève ne réagit.</i></p> <p>P. « Regarde. Quand je t'avais donné un carré ou un rectangle et que je t'ai donné l'aire. Soit tu t'amuses à me dire que un carré c'est 1 cm² et tu les comptes. Soit tu appliques une formule. Et c'est quoi la formule? [...] »</p> <p>E. « Base fois hauteur. »</p> <p><i>S'ensuit une explication relative au calcul de l'aire d'un rectangle...</i></p> <p>P. « Je vais faire la même chose pour le triangle. C'est quoi l'aire du triangle? »</p> <p>E2. « Longueur fois largeur. »</p> <p>P. « Tu n'utilises pas les bons termes. Je suis d'accord que c'est la longueur multipliée par la largeur, divisé par 2 parce qu'il y a deux triangles dans un rectangle, mais ce ne sont pas les bons termes. »</p> <p>E3. « Base fois hauteur, divisé par 2. »</p> <p>P. « Base fois hauteur, divisé par 2, parce que dans un triangle il y a une base et une hauteur; il n'y a pas de longueur, ni de largeur... »</p> <p><i>Tous les élèves n'ont pas pris les mêmes mesures dans le triangle (certains ont pris l'hypoténuse comme base) et les précisions de mesure varient ... Un élève propose une base de 4,3 cm...</i></p> <p>P. « 4,3? <i>[Il mesure.]</i> C'est 4,2. On va prendre cette base-là et cette hauteur-là pour avoir plus facilement [les deux côtés de l'angle droit]: ça fait 3 et 3. »</p> <p><i>P explique alors son calcul (3*3/2), puis propose de le transformer en tenant compte de l'échelle.</i></p>