

Création d'actifs financiers et remboursements anticipés Securitization and Prepayments

Christian Gouriéroux

Volume 70, Number 3, septembre 1994

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/602144ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/602144ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Gouriéroux, C. (1994). Création d'actifs financiers et remboursements anticipés. *L'Actualité économique*, 70(3), 227–245. <https://doi.org/10.7202/602144ar>

Article abstract

We discuss the econometric features of securitization: descriptive or structural analysis of prepayment behaviours, consequences on the pricing of mortgage backed securities. We insist on the distinction between disaggregated approaches based on individual loans, and aggregated ones based on pool data.

CRÉATION D'ACTIFS FINANCIERS ET REMBOURSEMENTS ANTICIPÉS*

Christian GOURIÉROUX
CREST
CEPREMAP

RÉSUMÉ — Nous discutons les principales questions économétriques liées au phénomène de titrisation : études descriptives ou structurelles des comportements de remboursements anticipés, conséquences au niveau de la valorisation des titres. Ceci conduit à distinguer les approches désagrégées étudiant directement les crédits, des approches agrégées s'intéressant aux lots de créances.

ABSTRACT — *Securitization and Prepayments.* We discuss the econometric features of securitization : descriptive or structural analysis of prepayment behaviours, consequences on the pricing of mortgage backed securities. We insist on the distinction between disaggregated approaches based on individual loans, and aggregated ones based on pool data.

INTRODUCTION

L'idée de cet exposé est de présenter une démarche économétrique dans son ensemble, en mettant en évidence ses diverses étapes :

- la description de l'objectif, ici la construction et la valorisation d'actifs financiers,
- l'analyse des données disponibles,
- l'écriture et l'estimation de modèles descriptifs susceptibles de s'ajuster à ces données,
- la mise en place de modèles de comportement compatibles avec les modèles descriptifs précédents et leur estimation,
- l'utilisation de ces divers modèles pour fournir des réponses, non forcément uniques, aux questions posées.

Le thème retenu pour illustrer cette démarche peut *a priori* sembler à l'écart des applications économétriques usuelles. Le choix s'explique cependant par

* Texte révisé de la Grande conférence du Centre de recherche et développement en économique (C.R.D.E.) présentée à l'Université de Montréal le 16 avril 1993.

l'importance pratique de l'application, par la nécessité d'utiliser conjointement des approches relatives aux comportements individuels et à l'étude de séries temporelles, par l'existence de larges ensembles de données, qui vont permettre l'utilisation de modélisations non linéaires plus adaptées à la description du problème, par la complexité du problème aussi bien du point de vue de la valorisation du titre que de la description des marchés.

La transformation de lots de créances en actifs financiers échangeables est l'un des moyens importants de développement des marchés financiers. Utilisé depuis de nombreuses années aux États-Unis, où le marché correspondant à un ordre de grandeur comparable à celui des bons du Trésor; il a été introduit récemment sur les marchés européens. On dispose pour étudier ces transformations d'ensembles de données doublement indexées : individu \times dates ou titre \times date :

- données concernant les crédits et les comportements de remboursement au niveau individuel [nombre d'observations de l'ordre du million],
- données relatives à des lots de crédits introduits sur le marché et à la modification temporelle de leur structure [nombre d'observations de l'ordre de 50-100.000 pour les titres les plus échangés].

L'analyse de telles données ne peut être menée par des méthodes trop simplistes. L'expérience a montré que la non-prise en compte de certaines variables, comme les effets de taux, pouvait entraîner des pertes financières importantes. Par ailleurs la qualité des modèles utilisés influe sur la qualité de la valorisation des titres et est donc un élément important de la concurrence entre les firmes intervenant sur le marché.

En fait, la modélisation doit impérativement relier une description de comportements individuels [au niveau des crédits] à une description des prix des actifs, liée à la structure des lots de crédits. Les modèles utilisés doivent tenir compte de la forme des données (souvent des données de durée), de la non-linéarité des comportements (décision de rembourser le crédit de façon anticipée si le taux d'intérêt courant passe en dessous d'un certain seuil), des optimisations intertemporelles effectuées par les individus, des corrélations temporelles pouvant exister entre diverses variables importantes (taux court, taux long, prix des logements,...), de l'hétérogénéité individuelle. Ces modèles sont de ce fait complexes et demandent l'utilisation de méthodes économétriques récentes : modèles à risques concurrents, approches semi-paramétriques, méthodes fondées sur des simulations des comportements.

La partie financière du problème : valorisation et couverture des titres, est elle aussi délicate. Ceci résulte de la diversité des risques financiers contenus dans ces titres : risques de taux, pour la couverture desquels existent des instruments financiers, risques de variations de prix [inflation générale, prix des logements,...], et surtout risques individuels, qui ne peuvent eux être couverts par les

instruments financiers disponibles. Il s'agit donc d'un contexte de marchés incomplets pour lesquels on ne peut valoriser de façon usuelle par des raisonnements d'arbitrage. Peut-on alors espérer valoriser par l'intermédiaire de modèles d'équilibre ? Ici encore l'approche est rendue compliquée par le fonctionnement du marché où les intervenants disposent d'informations très différentes ; si les institutions de crédits fournissant les créances à la base de la constitution des lots sont censées connaître leur clientèle, cette information n'est généralement pas disponible pour les autres intervenants. Ceux-ci connaissent les prix des titres basés sur les lots de crédits, éventuellement leur structure, et rarement la déformation dans le temps de cette structure.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons discuter plus en détail ces divers aspects. Le but de telles analyses de titres fondés sur des créances individuelles est de conduire à des valorisations, tenant compte de la structure, à des créations de titres tenant compte des besoins des demandeurs,...c'est-à-dire d'introduire un plus grand degré de différenciation dans la pratique de la titrisation.

1. TITRISATION

Cette opération consiste à transformer en actifs financiers des lots de créances. Les actifs les plus simples (*pass-through*) fournissent au détenteur une fraction donnée des flux du lot : flux d'intérêt et de capital, remboursements anticipés inclus et défaillances exclues. Des titres plus complexes peuvent être construits à partir des titres de base que constituent les *pass-through*. Deux idées servent à de telles constructions : la première consiste à séparer les flux d'intérêt des flux de principal (on parle d'*I.O. Interest Only*, et *P.O. Principal Only*), et permet d'introduire des actifs avec des risques et des durations sensiblement différents. La seconde idée consiste à démembrer le *pass-through* selon le terme des flux de façon à introduire des actifs de court, moyen et long termes.

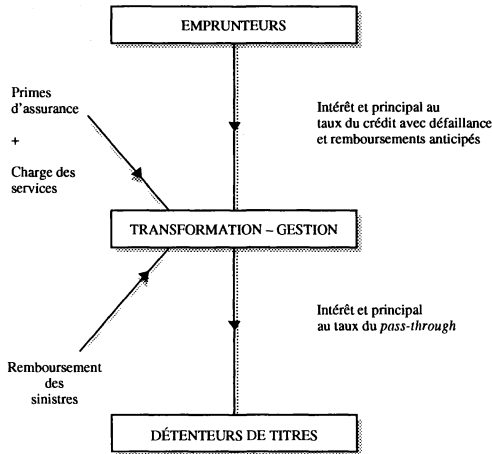
De façon simplifiée le principe est dans le cas d'un *pass-through* décrit ci-dessous. On notera que le lot de créances peut contenir des prêts de caractéristiques : terme, niveau de taux, type d'ajustement de taux...différentes, et que les flux de l'actif sont eux délivrés à un taux fixe unique, généralement différent des taux des prêts supports.

Ce processus de transformation présente divers avantages et inconvénients du point de vue des intervenants et de la gestion des marchés financiers.

Pour les organismes de crédit, ceci permet de diversifier le refinancement des crédits, d'assouplir certaines contraintes comme la satisfaction des ratios Cooke, de diminuer les risques, dont une partie est reportée sur les détenteurs et les sociétés d'assurance. La titrisation peut aussi conduire à une spécialisation des tâches séparant l'aspect commercial de recherche de demandeurs de prêts, des tâches de sélection de la clientèle, d'assurance des risques de défaillance, de constitution et de gestion des titres adossés à des lots de créances...

SCHEMA 1

LE PRINCIPE DE TITRISATION



Pour les investisseurs l'avantage est de disposer d'une gamme de produits très large concernant les termes, les durations, les niveaux de risques, et dont certains sont très liquides. Un autre argument invoqué est souvent la bonne rentabilité de ces titres : de l'ordre aux États-Unis de 100 à 200 points au-dessus des Bons du Trésor, de 30 à 90 points au-dessus des obligations d'entreprises. Cet argument doit cependant être considéré prudemment, cette rentabilité supérieure compensant en fait un risque plus élevé, même si beaucoup de ces titres sont notés AAA .

La situation est moins tranchée lorsqu'on se place du point de vue de la gestion générale des marchés. Nous avons en effet signalé que la titrisation constituait un moyen de détourner les restrictions de crédits, contraignant à un contrôle des crédits distribués beaucoup plus par l'intermédiaire des taux que par celui des ratios prudentiels (coefficients de fonds propres, de liquidité,...). Surtout l'accroissement des sommes investies dans ces titres se fait par substitution avec d'autres investissements et peut donc se révéler défavorable au développement économique.

Les titres adossés à des lots de créances sont souvent assimilés à des obligations, ce qui a beaucoup contribué aux développements des marchés correspondants. Il faut insister sur le fait qu'ils en sont en réalité sensiblement différents, ce qui crée la difficulté de leur valorisation. Ainsi ils s'amortissent au fur et à mesure de la vie du pool sous-jacent, alors que les obligations ont un paiement *in fine*. Surtout les flux versés sont beaucoup plus complexes et doivent tenir compte des conditions d'indexation, et des phénomènes de défaillance et de remboursement anticipé.

Le marché s'est développé aux États-Unis depuis 1970, avec une croissance de l'encours de l'ordre de 30-50 % par an. Les titres sont principalement fondés sur des lots d'hypothèques (*MBS: Mortgage Backed Securities*), bien que des crédits d'autres types soient de plus en plus titrisés : crédits-bails informatiques à partir de 1985, crédits aux entreprises (1986), crédits automobiles, crédits permanents,....

L'introduction de la titrisation est en France beaucoup plus récente (décret du 23/12/88). Le taux d'accroissement est de l'ordre de 50% par an. Les lots sont actuellement de deux types, soit constitués de prêts aux régions (faible diversification des demandeurs de prêts sous-jacents), soit constitués de crédits consommation court terme (les données sont ici nombreuses et les lots comportent des crédits correspondant à de grands nombres d'individus).

2. LES FLUX

L'étude des titres adossés repose sur celle des crédits sous-jacents et en particulier sur la forme de la séquence des flux. Les crédits peuvent être de types assez variés, mais pour simplifier nous considérons le cas de prêts à taux fixe et mensualité constante. Nous notons B_0 le montant initial du prêt, γ le taux du prêt, H le terme. La mensualité d'ordre h est alors donnée par :

$$m_h = B_0 \gamma \frac{(1 + \gamma)^H}{(1 + \gamma)^H - 1}, \quad (2.1)$$

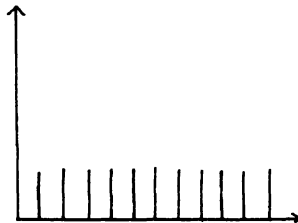
et le capital restant dû est :

$$B_h = B_0 \frac{(1 + \gamma)^H - (1 + \gamma)^h}{(1 + \gamma)^H - 1}. \quad (2.2)$$

La séquence de flux en absence de « sinistres » est donc la suivante :

FIGURE 1

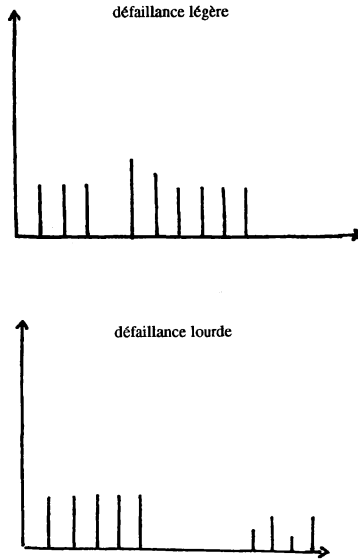
FLUX D'UN PRÊT TAUX FIXE MENSUALITÉ CONSTANTE



Cette séquence de flux peut cependant être modifiée de façon importante du fait de défaillances ou de remboursements anticipés. Les défaillances, qui sont souvent assurées pour la constitution des titres, peuvent être légères (retard de paiement) ou lourdes (passage au contentieux avec éventuellement renégociation du terme et du niveau de mensualité).

FIGURE 2

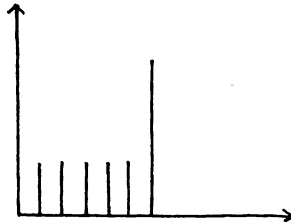
FLUX EN CAS DE DÉFAILLANCE



Les remboursements anticipés (R.A.) peuvent être avec ou sans pénalités, globaux ou partiels. [En fait les pénalités pour R.A. sont interdites en France pour les prêts à la consommation, et faibles aux U.S.A. du fait de la concurrence]. Nous donnons ci-dessous l'exemple d'un R.A. global, où le capital restant dû est versé avant le terme du contrat.

FIGURE 3

FLUX EN CAS DE R.A.



Les R.A. n'étant jamais assurés constituent la cause principale de déformation des flux. Du fait des R.A., des défaillances et éventuellement pour des prêts plus complexes de l'indexation des mensualités, les flux et le terme réel du prêt doivent être considérés comme aléatoires. La première étape de toute analyse consiste à comprendre ces phénomènes de défaillance et de R.A., soit par l'intermédiaire de modèles descriptifs joints pour les durées potentielles avant

défaillance ou R.A., soit par l'intermédiaire de modèles structurels expliquant à quel moment l'individu décide par exemple d'exercer son option de R.A.. On en déduit alors les prévisions des flux au niveau des prêts individuels, puis par agrégation au niveau des lots.

Cette étude précise des flux est l'étape nécessaire avant d'étudier les aspects financiers : valorisation des titres, couverture du risque de remboursement anticipé, problèmes qui ont leur analogue direct pour l'option de défaillance : détermination des primes d'assurance et des couvertures du risque de défaut. Les primes ou prix de base doivent être calculés en tenant compte de l'hétérogénéité individuelle. Il faut commencer par classer les risques figurant dans le lot en sous-ensembles homogènes, calculer les prix et les primes sur ces sous-ensembles, puis agréger ces prix pour en déduire les notions analogues relatives au lot lui-même.

Une fois établie cette classification en sous-ensembles homogènes et évalués les risques correspondants, on peut s'intéresser à des problèmes plus complexes liés à la production de titres, comme : quels lots retenir ? Comment démembrer de façon adéquate le titre *pass-through*? Quels prix proposer pour les titres démembrés ?...

La première présentation cohérente de tels problèmes est due à Schwartz-Torous (1989).

3. MODÈLES DE REMBOURSEMENTS ANTICIPÉS

3.1 Modèles descriptifs

Il faut effectuer une étude précise de la durée réelle du crédit, c'est-à-dire de la première date correspondant soit à un R.A., soit à une défaillance grave, soit au terme. On suppose implicitement que la défaillance grave est assurée, et qu'en cas de défaillance la société d'assurance rembourse le capital restant dû, ce qui est la pratique usuelle. Du point de vue de la valorisation du titre, il y a donc équivalence entre une défaillance et un R.A..

La loi de la durée réelle du crédit est définie par l'intermédiaire du taux de R.A. à la date h , c'est-à-dire du taux de sortie en h sachant que le crédit est encore en vie après $h-1$ mois. La spécification est habituellement introduite sur ce taux :

$$q_{i,\tau_i}(h) = \text{fonction}\left[h, \tau_i, X_i^1, X_{i,\tau_i+h}^2, X_{\tau_i+h}^3\right], \quad (3.1.1)$$

en désignant par i l'indice du crédit, par τ_i la date de début de contrat et par X les diverses variables explicatives.

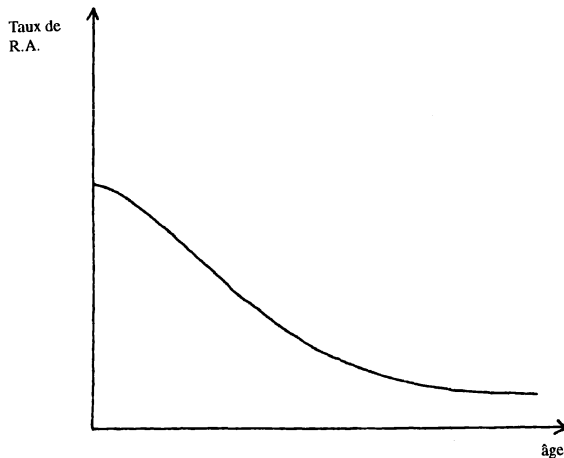
Ces variables sont de divers types. Elles peuvent être purement individuelles : type de crédit, montant initial du prêt, âge, CSP, région d'habitation du demandeur, ..., individuelles temporelles : revenu du demandeur, taille de la famille, ... ou purement temporelles : évolution de la structure par terme des taux

d'intérêt, évolution des prix, indicateurs de demande, variables saisonnières,... Elles sont introduites pour tenir compte des principales causes de R.A. : variations des taux, modifications brusques du revenu, changement du bien sous-jacent (changement de logement, de véhicule,...).

L'estimation de modèles de durée spécifiés par l'intermédiaire des fonctions de taux est cependant rendue délicate par diverses difficultés liées aux données. Il est évidemment souhaitable de disposer de données individuelles sur des crédits comparables à ceux figurant dans le lot, mais souvent on ne dispose que de données sur lots. On ne peut alors introduire que des variables agrégées : variables temporelles, structure des lots, avec des risques importants de biais d'agrégation et de mauvaises évaluations des effets de variables temporelles, en particulier des effets de taux. Le biais de ce type le plus connu est l'**effet d'usure**. Si une génération de crédits homogènes à taux fixes est confrontée à une baisse des taux, les crédits restant dans le lot après les R.A. sont plus résistants à des baisses ultérieures de taux.

FIGURE 4

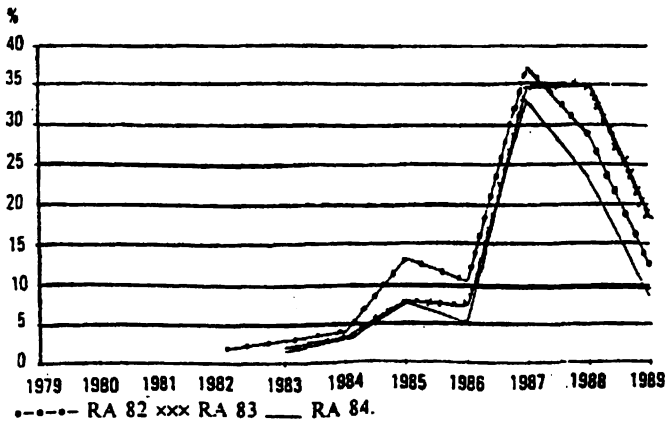
L'EFFET D'USURE



Cet effet est très difficile à cerner dans un lot hétérogène du fait de la modification dans le temps de la structure du lot résiduel. Il faut au moins pour corriger partiellement cet effet considérer les crédits du lot selon leur date de début, c'est-à-dire par génération. Le graphique ci-dessous donne ainsi des taux de R.A. par génération de crédit et met clairement en évidence la vague de R.A. de 1987.

FIGURE 5

TAUX DE R.A. PAR GÉNÉRATION



D'autres difficultés de la phase d'estimation proviennent des bases de données qui correspondent à des échantillons non représentatifs et ne comportent pas tous les renseignements souhaitables. Les diverses causes usuelles de non représentativité sont pour ce problème toutes présentes :

- effets de fenêtre d'observation : les bases contenant les informations sur des crédits non terminés et ne contenant pas d'information sur les crédits terminés, comparativement les plus mobiles ;
- sélection endogène de clientèle effectuée par les institutions afin d'éviter les défaillances ; or, risques de défaillance et de R.A. sont corrélés ;
- autosélection de la clientèle qui choisit son type de crédit, indexé ou pas, le terme plus ou moins long... en fonction de ses anticipations, de son intention de rembourser ou pas de façon anticipée ;
- modification des conditions générales avec notamment l'accroissement très rapide de la gamme de produits offerts, l'effet des relances commerciales : inciter un individu à changer de voiture augmente la probabilité de R.A. sur son crédit automobile,....

Par ailleurs, de nombreux renseignements sont absents comme : les types de crédits qui lui étaient initialement proposés notamment par les concurrents, les raisons du R.A. : renégociation pour raison financière ou changement de logement, et le type de crédit qui a éventuellement été repris, le détail des sommes récupérées et des dates de récupération dans le cas de défaillance....

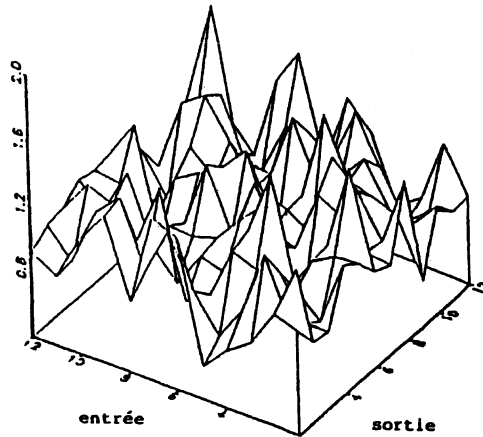
Comme nous l'avons déjà mentionné les estimations peuvent être effectuées à partir de données de lots (voir par exemple Richard, S. et R. Roll, 1988) ou sur données individuelles (voir par exemple De Toldi, M. Gouriéroux, C. et A. Monfort, 1993).

Que l'approche descriptive soit appliquée au niveau individuel ou au niveau agrégé, une dernière difficulté est la prise en compte des effets saisonniers sur les taux de R.A.. En effet, s'introduisant au niveau de données de durée, ils peuvent être relatifs à la date d'entrée ou aux dates potentielles de sorties. Une modélisation prenant en compte ce double effet est :

$$\begin{aligned} q(h) &= q_0(h) \exp \left[\sum_{s_1} \sum_{s_2} c_{s_1, s_2} \xi_{s_1}(\tau) \xi_{s_2}(\tau + h) \right] \\ &= q_0(h) \exp c_{s_1 s_2}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

où s_1 désigne le mois associé à la date de début de prêt et s_2 le mois associé à la date potentielle de sortie $\tau + h$. Les coefficients $c_{s_1 s_2}$ mesurent ces effets de saisonnalité croisés, et la fonction q_0 peut être vue comme un taux de R.A. corrigé des variations saisonnières. Un modèle de ce type a été appliqué à des données de crédits automobiles dans De Toldi-Gouriéroux-Monfort (1993). Elles concernent des crédits taux fixe, mensualité constante, à 48 mois. Le modèle permet de mettre en évidence des effets croisés importants, traduisant une structure périodique de 12 mois.

FIGURE 6

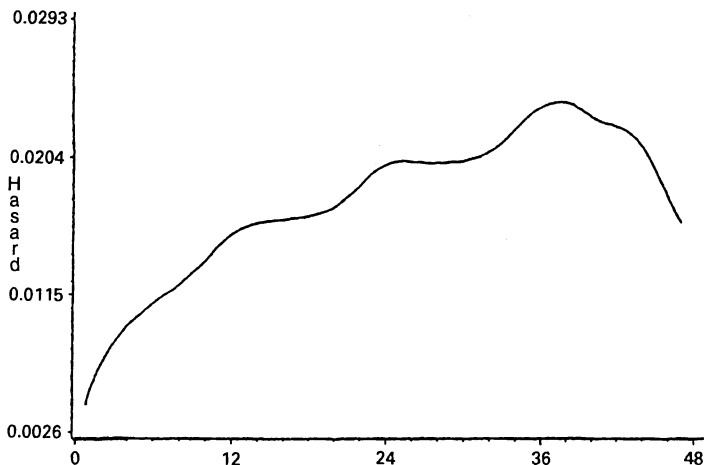
EFFETS SAISONNIERS $c_{s_1 s_2}$ 

Les taux de R.A. corrigés des variations saisonnières ont la forme d'une fonction croissante, traduisant l'augmentation de la probabilité de renouvellement avec l'âge du véhicule, avec deux effets de bord : peu de changements de véhicules juste après l'achat et peu de R.A. lorsqu'on approche du terme du crédit.

Les taux de R.A. apparaissent assez élevés : 12 %, 16 %, 16 %, 12% respectivement pour les 1ère, 2ème, 3ème, et 4ème années. Seuls 44 % des crédits initiaux arrivent au terme du contrat.

FIGURE 7

TAUX CORRIGÉS DES VARIATIONS SAISONNIÈRES



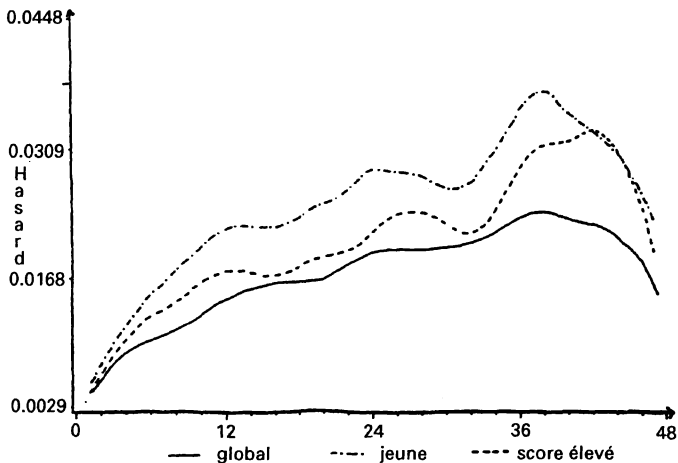
La démarche précédente doit évidemment en pratique être appliquée en tenant compte des autres facteurs explicatifs éventuels. On recherche souvent dans ce cas une forme dite à hasard proportionnel où la spécification est du type :

$$q(h) = q_0(h) \exp(Xb) \exp c_{s_1} s_2 , \tag{3.1.3}$$

où X désigne les autres variables explicatives. Le graphique ci-dessous où sont représentés les taux corrigés des variations saisonnières pour diverses sous-catégories : individus jeunes-individus âgés, individus risqués pour la défaillance-individus peu risqués,..., montre l'existence d'une telle proportionalité.

FIGURE 8

PROPORTIONALITÉ DES FONCTIONS DE HASARD



Ce type de graphique montre aussi une corrélation entre les deux risques : défaut et R.A., donc une difficulté au niveau des valorisations des deux options correspondantes.

3.2 Modèles structurels

Il s'agit essentiellement de modèles de choix discrets dynamiques. Nous allons rapidement présenter un tel modèle décrivant les R.A. pour raison financière. Nous supposons que l'individu a, à chaque date, le choix entre des crédits à taux fixe, mensualité constante, de diverses maturités H_1, H_2, H_3 . Nous notons $\gamma(\tau, H_1), \gamma(\tau, H_2), \gamma(\tau, H_3)$ les taux de ces crédits s'ils débutent à la date τ .

Considérons alors un individu disposant d'un crédit de maturité H_0 encore en vie à la date T . On peut à cette date calculer son utilité anticipée s'il renégocie son crédit à la date postérieure τ et choisit une maturité H . Nous désignons par $V(T, \tau, H)$ ce niveau d'utilité.

On peut alors exprimer durée et choix à partir de ces niveaux d'utilité de base. La durée réelle du crédit est $D = d$ et la renégociation s'effectue pour un prêt de maturité $H^* = H_j^*$ sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
 [D = d, H^* = H_j^*] = \\
 \{ \text{Max}_j V[T, T, H_j] < \text{Max}_{T+1 \leq \tau \leq H_0+1} \text{Max}_j V[T, \tau, H_j] \\
 \text{pour } 1 \leq T \leq d, \\
 \text{Max}_j V(d+1, d+1, H_j) = V(d+1, d+1, H_j^*) \\
 > \text{Max}_{d+2 \leq \tau \leq H_0+1} \text{Max}_j V(d+1, \tau, H_j) \}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Il s'agit d'une formulation des choix analogue à celle utilisée dans les modèles de recherche d'emploi. À chaque instant potentiel de décision l'individu décide s'il rembourse ou non de façon anticipée, et dans l'affirmative quel crédit il choisit. Cette spécification comprend deux types de variables endogènes : les niveaux d'utilité non observables sous-jacents et les choix effectués. Elle est complétée en se donnant les lois des niveaux d'utilité dont on déduit les probabilités de choix, en particulier la loi de la durée D , via la transformation (3.2.1). Si les niveaux d'utilité sont par exemple supposés normaux, on aboutit à un modèle probit polytomique [McFadden, 1976], où les probabilités élémentaires comportent des intégrales multiples de grande dimension. L'application d'une méthode du maximum de vraisemblance est de ce fait rendue difficile. On peut soit approcher ces intégrales par des méthodes de simulations [Gouriéroux-Monfort, 1993 ; McFadden, 1989], soit estimer une spécification autre et corriger du biais de spécification par inférence indirecte [Gouriéroux-Monfort-Renault, 1993].

Difficile à mettre en œuvre, l'approche structurelle présente cependant l'avantage de faire apparaître des facteurs explicatifs intéressants. Ceux-ci devraient être introduits dans les modèles plus descriptifs et leur significativité systématiquement testée. Reprenons la démarche structurelle.

Le niveau d'utilité $V(T, \tau, H)$ est écrit comme une somme pondérée des utilités anticipées des consommations des diverses dates, et celles-ci correspondent à des montants égaux aux flux de revenus diminués des mensualités de remboursement et corrigés des investissements financiers éventuels. Les décisions de R.A. devraient de ce fait dépendre :

- des évolutions réelles et anticipées de la structure par terme des taux, du revenu individuel, des prix à la consommation, des prix d'actifs financiers...avec à la fois des effets moyens, des effets de volatilité ou d'inversion de structure par terme...
- du montant initial du prêt, de la maturité initiale...

L'approche structurelle montre de plus que la décision est au niveau de l'individu, et que le taux de R.A. doit être calculé comme une proportion de crédits, et non comme une proportion de dollars remboursés, afin de ne pas mêler remboursement et auto-amortissement des crédits. C'est cependant cette seconde pratique qui est souvent utilisée dans les modèles descriptifs sur lots.

Le lecteur intéressé dans ces démarches structurelles pourra consulter par exemple Alm-Follain (1987).

4. ASPECTS FINANCIERS

Une fois analysés les flux, il est possible de considérer les propriétés financières des crédits individuels (Quel supplément de taux d'intérêt faudrait-il introduire pour compenser l'option de R.A. ?) et des lots de crédits (Quels prix de base pour les titres ?).

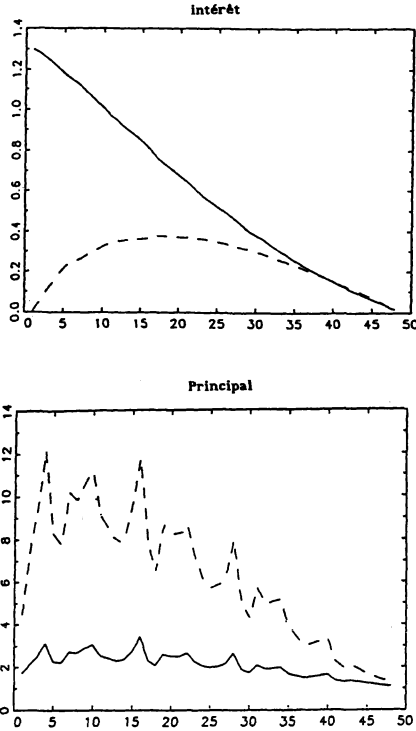
4.1 *Résumés descriptifs*

Les prix de base vont dépendre des gains anticipés, et des variabilités de ces gains, utilisées comme mesures du risque. Ils doivent de plus être distingués terme par terme. Ainsi il est naturel d'associer à chaque crédit et à chaque date les deux premiers moments EF_h , VF_h du flux F_h correspondant. Rappelons que ces moments dépendent de façon très sensible du type de crédit [ou du *pass-through*] considéré, en particulier du fait que le taux soit ou non indexé, des démembrements considérés du titre par terme, par partage intérêt-principal, et des caractéristiques individuelles via le comportement de R.A.

À titre d'illustration, nous présentons dans les figures ci-dessous les formes des flux moyens et de leur variabilité pour un lot de crédits automobiles démembré par terme (en abscisse) et par intérêt-principal.

FIGURE 9

FLUX MOYEN ET VARIABILITÉ DES FLUX



Ces formes sensiblement différentes montrent que les flux F_h , considérés comme des actifs contingents particuliers, admettront des caractéristiques financières : rendement anticipé, risque, durée... variées.

4.2 Valorisation

La démarche usuelle pour valoriser à une date t des titres contingents délivrant des flux aléatoires M_h , $h = t + 1, \dots, \tau_0 + H$ aux dates postérieures consiste à définir le prix comme l'anticipation de la somme des flux actualisés :

$$P_t = E_{\pi} \left[\sum_{\tau=t+1}^{\tau_0+H} M_{\tau} \beta(t, \tau) / I_t \right], \quad (4.2.1)$$

où $\beta(t, \tau) = \exp - \int_{\tau}^t \gamma_s ds$ est le facteur d'actualisation obtenu en cumulant de façon géométrique les taux courts futurs, où I_t désigne l'information disponible à la date t et où la probabilité π servant à calculer l'anticipation diffère généralement de la loi historique des variables. Il s'agit de la probabilité corrigée du ris-

que, c'est-à-dire de l'ensemble des prix normalisés des actifs contingents élémentaires au sens d'Arrow [Harrison-Kreps, 1979].

L'utilisation d'une formule de valorisation comme (4.2.1) n'est cependant pas immédiate.

On ne peut trouver la probabilité risque-neutre sans ambiguïté que s'il y a suffisamment d'actifs financiers régulièrement échangés pour couvrir les divers aléas s'introduisant dans les flux (hypothèse de marchés complets). Or, si les effets de taux d'intérêt peuvent être couverts par l'intermédiaire d'instruments financiers, si les effets de variables individuelles peuvent être fortement diminués par agrégation de crédits, c'est-à-dire par création de lots où chaque classe de risques homogènes est suffisamment nombreuse, il n'en est pas de même pour d'autres facteurs importants comme le prix du logement ou les volatilités des taux. Deux solutions délicates à mettre en oeuvre sont envisageables : adopter une démarche de valorisation pour marchés incomplets fournissant des intervalles de prix, mais la théorie correspondante n'en est qu'à ses débuts, ou introduire sur les marchés de nouveaux instruments financiers : option sur volatilité (l'introduction d'une telle option sur le marché de Chicago a montré qu'il s'agissait d'un instrument difficile à comprendre pour les intervenants), options sur prix des logements (très difficiles à introduire du fait de l'hétérogénéité des évolutions de prix selon les régions et même selon les quartiers d'une même ville).

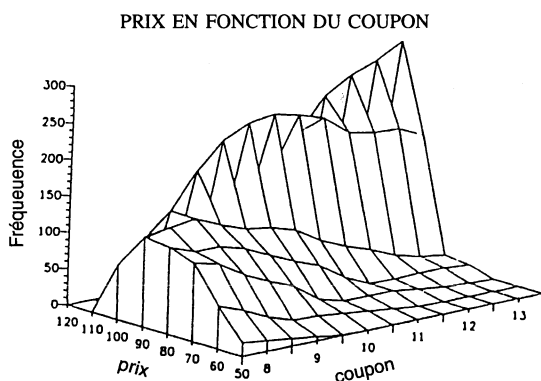
Même dans le cas « idéal » où les flux seraient uniquement fonctions des taux, il subsisterait diverses questions classiques à résoudre avant de pouvoir effectuer une valorisation. Nous rappelons rapidement les principales d'entre elles.

- (i) Il faut introduire un modèle d'évolution des taux. Or, ceux-ci sont souvent en temps continu alors que les flux sont versés à des dates discrètes. Il faut alors effectuer une valorisation récursive [voir e.g. : Kan - Kennan - Muller - Epperson, 1990].
- (ii) Il faut utiliser des modèles comportant suffisamment de paramètres pour s'ajuster aux données, mais aussi pour permettre diverses déformations de la courbe des taux et pouvoir mesurer l'impact de ces déformations sur les R.A.. Plutôt que des modèles simples de type Vasicek ou Brennan-Schwartz, il est préférable d'employer des formulations à facteurs [Heath - Jarrow - Morton, 1992, et aussi El Karaoui - Lacoste, 1992 ; Duffie - Kan, 1993 ; Clément - Gouriéroux - Monfort, 1993].
- (iii) Finalement ces modèles de taux en temps continu doivent être estimés à partir d'observations en temps discret. Ceci conduit à utiliser des méthodes d'estimation fondées sur des simulations. De façon analogue la formule de valorisation sera appliquée en utilisant des simulations dans la probabilité corrigée du risque.

Ces divers aspects conduisent en pratique à effectuer diverses simplifications. Supposant valide l'hypothèse de marché complet, on peut se demander quelle est l'erreur la plus importante : une mauvaise évaluation des comportements de R.A., ou l'utilisation de la loi historique au lieu d'une loi corrigée du risque. C'est clairement la première erreur qu'il faut éviter, par exemple ne pas oublier des variables explicatives importantes. De plus il semble que pour ce qui concerne des flux essentiellement fonctions de taux, probabilités historiques et risque neutre soient proches [Engle - Mustapha, 1992].

Une fois résolus ces problèmes, on peut en déduire des distributions de prix pour les titres en fonction de certaines de leurs caractéristiques. La première figure donne de telles distributions en fonction du coupon [Herskovitz, 1989].

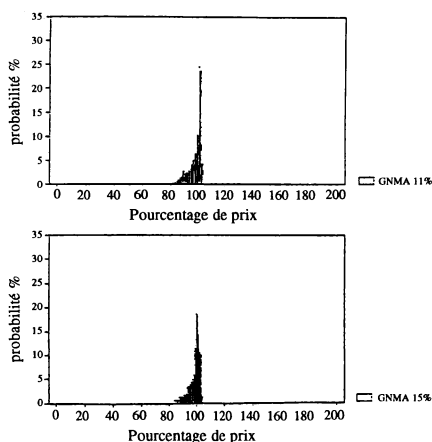
FIGURE 10



La seconde figure qui concerne des titres GNMA 11 % [Hayre - Lauterbach, 1992] est reproduite pour montrer la forte asymétrie de la distribution, et donc la nécessité de construire soigneusement les intervalles de prix correspondants.

FIGURE 11

ASYMÉTRIE DES DISTRIBUTIONS DE PRIX



CONCLUSION

Finalement beaucoup d'autres questions économiques et économétriques doivent aussi être résolues dans les phases de création de marchés, actuellement en cours en Europe. Certaines de ces questions sont classiques et d'autres plus spécifiques des titres fondés sur des crédits. Il faut en effet prévoir de fournir des possibilités de suivi des structures des lots afin de permettre les valorisations ultérieures durant la vie du titre.

Deux aspects importants sont discutés ci-dessous.

i) Comment créer la demande initiale, et la liquidité future des titres ?

La mise sur le marché des titres peut se faire en deux temps : l'offre initiale peut être réservée à quelques investisseurs privilégiés, qui auront un rôle d'intermédiaire et se chargeront de revendre les titres à leurs clients soit directement, soit indirectement en les intégrant dans des fonds de placement. La liquidité ne pourra cependant être assurée que si les titres émis correspondent aux besoins potentiels de la clientèle. En particulier, il est préférable de mettre sur le marché régulièrement des titres de même type, en leur donnant le même nom de base, ceci permettant d'accroître la visibilité de cette catégorie de titres. Il faudrait introduire un nombre suffisant de telles catégories afin de couvrir les besoins de diversification des clients vis-à-vis du rendement moyen, du risque, du terme... Finalement il faut éviter au début des marchés les titres « pourris » constitués à partir de lots de crédits avec de forts taux de défaillance par exemple. Ainsi actuellement ces lots résiduels sont en France systématiquement achetés par l'émetteur lui-même.

ii) Comment donner une information fiable aux investisseurs ?

Il est évidemment difficile, pour des raisons de coût et de confidentialité, de fournir une information microéconomique sur les crédits du lot. Il faut cependant donner une information suffisante pour que l'investisseur puisse comparer les prix des deux titres en corrigeant des structures différentes des lots sous-jacents, et des caractéristiques des institutions de crédits.

En plus d'information sur le cédant, ceci nécessite de connaître les répartitions des crédits selon les principales variables explicatives : taux de crédits, montant, âge, région,.... De tels tableaux peuvent être fournis dans le prospectus d'émission et nous en donnons ci-dessous un exemple correspondant au Fonds Commun de Créances CB3 émis le 18 Mai 1992. On notera que de tels tableaux fournissent des informations relatives à des croisements de variables : taux x durée, taux x capital restant dû,....

TABLEAU 1

ÉLÉMENTS SUR LA STRUCTURE D'UN LOT

Intervalle (FF)	Nombre de prêts	Encours (FF)	%	Taux moyen pondéré %	Durée résiduelle moyenne pondérée (mois)	Age moyen pondéré (mois)	Taux minimum %	Taux maximum %	Encours minimal (FF)	Encours maximum (FF)	Désé résiduelle maximale (mois)
0 à 10.000	240	1.960.255	0,09	17,62	32,4	8,9	12,95	18,97	3.035	9.977	58
10.000 à 15.000	963	12.710.025	0,58	17,76	30,1	9,3	13,68	18,97	10.013	14.975	58
15.000 à 20.000	2.329	41.604.946	1,91	17,64	32,1	9,4	11,83	18,97	15.003	19.975	58
20.000 à 25.000	2.676	61.140.457	2,81	17,53	32,7	11,4	11,51	18,96	20.005	24.995	58
25.000 à 30.000	3.750	103.370.275	4,75	16,92	35,0	9,2	11,50	18,96	25.021	29.997	58
30.000 à 35.000	3.166	103.139.045	4,74	16,81	35,3	11,3	11,50	18,96	30.006	34.987	58
35.000 à 40.000	3.477	130.320.010	5,99	16,55	38,3	10,0	11,49	18,96	35.011	39.996	58
40.000 à 45.000	2.904	123.487.430	5,68	16,28	38,2	11,8	11,51	18,96	40.021	44.996	58
45.000 à 50.000	3.509	166.521.491	7,66	15,91	41,2	10,0	11,50	18,96	45.008	50.000	58
50.000 à 55.000	2.370	124.523.233	5,73	15,47	40,5	12,5	11,51	18,96	50.011	54.995	58
55.000 à 60.000	2.502	143.546.748	6,60	15,28	44,0	10,3	11,51	18,96	55.013	59.980	58
60.000 à 65.000	1.862	116.317.609	5,35	14,99	43,0	11,5	11,51	18,96	60.005	64.998	58
65.000 à 70.000	1.784	120.275.239	5,53	14,81	45,1	10,5	11,51	18,96	65.007	69.991	58
70.000 à 75.000	1.589	115.613.771	5,32	14,16	44,6	10,9	11,51	18,96	70.001	74.984	58
75.000 à 80.000	1.561	120.695.887	5,55	14,03	47,5	8,4	11,51	18,96	75.042	79.984	58
80.000 à 85.000	1.082	89.379.362	4,11	13,66	46,5	10,3	11,51	18,96	80.018	84.982	58
85.000 à 90.000	835	72.909.811	3,35	13,54	46,9	9,7	11,51	18,96	85.020	89.980	58
90.000 à 95.000	1.161	107.165.654	4,93	13,16	48,6	7,9	11,51	18,96	90.033	94.918	58
95.000 à 100.000	1.105	106.988.790	4,92	13,14	51,4	5,4	11,51	15,96	95.027	99.937	58
100.000 à 110.000	942	98.582.133	4,53	13,05	50,1	7,8	11,87	18,96	100.001	109.912	58
110.000 à 120.000	633	72.443.972	3,33	12,85	50,0	7,8	11,87	18,96	110.026	119.825	58
120.000 à 130.000	470	58.623.899	2,70	12,52	50,3	7,5	11,87	18,96	120.101	129.728	58
130.000 à 140.000	285	38.608.284	1,78	12,33	50,9	7,5	11,51	15,48	130.053	139.897	58
140.000 à 150.000	305	44.001.834	2,02	12,13	53,3	5,6	11,88	18,96	140.052	149.966	58
Total.....	41.500	2.173.930.158	100,00	14,87	43,4	9,7	11,49	18,97	3.035	149.966	58

Un tel tableau est cependant une information statique et des tableaux similaires devraient être fournis régulièrement durant la vie du titre, si on veut pouvoir comparer les prix en tenant compte des déformations de structures résultant de l'effet d'usure.

Cette discussion montre que la vente de ces titres nécessite une demande suffisante, que celle-ci sera plus importante si les investisseurs sont mieux informés, que ce supplément d'information ne peut avoir lieu que par la publication régulière des structures des lots, et que ceci conduit naturellement à introduire des titres de structures facilement comparables. Besoins commerciaux, financiers, informatifs, statistiques apparaissent ainsi intimement liés.

BIBLIOGRAPHIE

- ALM, J., et J. FOLLAIN (1987), « Consumer Demand for Adjustable Rate Mortgage », *Housing Finance Review*, 6, 1-16.
- CLÉMENT, E., C. GOURIÉROUX, et A. MONFORT (1993), « Prediction of Contingent Price Measures », CREST DP 9329.
- De TOLDI, M., C. GOURIÉROUX, et A. MONFORT (1993): « Prepayment Analysis for Securitization », à paraître dans *Journal of Empirical Finance*.
- DUFFIE, D., et R. KAN (1993), « A Yield Factor Model of Interest Rates », Stanford DP.
- EL KARAOUI, N., et LACOSTE (1992), « Multifactor Models of the Term Structure of Interest Rates », DP Paris VI.
- ENGLE, R., et C. MUSTAPHA (1992), « Implied ARCH Models from Option Prices », *Journal of Econometrics*, 52 : 289-311.
- GOURIÉROUX, C., et A. MONFORT (1993), « Simulation Based Inference », *Journal of Econometrics*, 59 : 5-33.
- GOURIÉROUX, C., A. MONFORT, et E. RENAULT (1993), « Indirect Inference », *Journal of Applied Econometrics*, 8 : 85-118.
- HARRISON, J., et D. KREPS (1979), « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets », *Journal of Economic Theory*, 20 : 381-408.
- HAYRE, L., et K. LAUTERBACH (1992), « Option Adjusted Spread Analysis of MBS », dans FABOZZI, *Bond and Mortgage Markets*, Probus.
- HEATH, D., R. JARROW, et A. MORTON (1992), « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, 60 : 77-106.
- HERSKOVITZ, M. (1989), « A New Look at MBS Option-Adjusted Spread », *Housing Finance Review*, 8 : 43-61.
- KAN, J., D. KENNAN, W. MULLER, et J. EPPERSON (1990), « Pricing Commercial Mortgages and Their MBS », *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 3.
- McFADDEN, D. (1976), « Quantal Choice Analysis: A Survey », *Annals of Economic and Social Measurement*, 5 : 363-380.
- McFADDEN, D. (1989), « A Method of Simulated Moments for Estimation Discrete Response Models without Numerical Integration », *Econometrica*, 57 : 995-1026.
- RICHARD, S. et R. ROLL (1988), « Modelling Prepayments on Fixed Rate MBS », GOLDMAN-SACHS, *Mortgage Securities Research*, dont une version est parue en 1989 dans *Journal of Portfolio Management*.
- SCHWARTZ, E. et W. TOROUS (1989), « Prepayment and the Valuation of MBS », *Journal of Finance*, 44 : 375-391.