

L'exploration des ressources extractives non renouvelables : théorie économique, processus stochastique et vérification

The exploration of non-renewable natural resources

Ph. Crabbé

Volume 53, Number 4, octobre–décembre 1977

L'économique des ressources naturelles

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/800747ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/800747ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Crabbé, P. (1977). L'exploration des ressources extractives non renouvelables : théorie économique, processus stochastique et vérification. *L'Actualité économique*, 53(4), 559–586. <https://doi.org/10.7202/800747ar>

Article abstract

Most of the literature devoted to the "theory of the mine" has been developed under certainty. It has been unable to explain the activity of exploration. The stochastic models of exploration were developed quasi-independently from economic theory. The purpose of this article is to survey both the mining and economic literature related to the "theory of the mine" under uncertainty and the exploration models since the turn of the century. The survey is complementary to the one made in this journal by F. Peterson and A.C. Fisher.

The first part defines exploration as being essentially a search and information gathering activity. It reviews the contributions to the economic theory of exploration and resource stock uncertainty. It compares the optimal extraction path and the life cycle of the mine under stock uncertainty and stock certainty. It shows in particular that increasing the rate of discount is generally inappropriate to take account of stock uncertainty. Some partial equilibrium results on exploration are given as well. The presence of stock uncertainty or exploration in a general equilibrium model is shown to jeopardize the optimality of competitive allocations.

The second part points out the wealth of the theoretical and empirical analysis of exploration as a stochastic process. It first reviews the literature on size distributions of reserves which gives strong theoretical and empirical support to the lognormal hypothesis. It then goes on to the exploration models which roughly speaking can be broken down into two groups. The Allais type models, better suited for relatively unexplored regions, which combine a Poisson or negative binomial process for discovery with a lognormal distribution for sizes. The Arps-Roberts-Kaufman type models, more adequate for "mature" regions, assume exhaustive sampling with probability proportional to size of discovery. Generally the treatment of the discovery process, to be distinguished from the sampling for sizes, and the handling of geological information are still woefully inadequate.

The third and last part of the survey points out the gap which exists in the microeconomic literature about the study of random inputs. It suggests that the theory of dams and insurance and the theory of search especially adaptive search could be fruitfully used. Problems which remain to be tackled are the influence of stock uncertainty on grade of ore mined and on investment in capacity.

L'EXPLORATION DES RESSOURCES EXTRACTIVES NON RENOUVELABLES : THÉORIE ÉCONOMIQUE, PROCESSUS STOCHASTIQUE ET VÉRIFICATION

« C'est par la mise en réserve que
l'homme se libère du hasard. »

(P. MASSE)

La « théorie de la mine » ou théorie économique de la firme produisant des ressources extractives non renouvelables a été généralement développée jusqu'à récemment dans l'hypothèse de la certitude¹. Elle a été incapable de rendre compte de l'activité d'exploration bien que certains économistes aient essayé d'intégrer celle-ci dans un cadre d'analyse essentiellement déterministe au moins en longue période². Les modèles stochastiques de l'activité d'exploration se sont développés quasi indépendamment de la théorie économique. Cette séparation relative est d'autant plus regrettable que le processus aléatoire de l'exploration a fait l'objet d'études théoriques et empiriques plus poussées que beaucoup d'autres phénomènes stochastiques étudiés en science économique à l'exception du comportement des prix sur les marchés à terme³.

1. L'auteur remercie les professeurs Y. Balcer, K. Borch et I. Spry ainsi que les membres du Séminaire d'Economie Politique à l'Université Laval pour leurs commentaires sur la version préliminaire de ce texte. La responsabilité de son contenu demeure celle de l'auteur. L'assistance de G. Rhéaume dans la recherche bibliographique fut très précieuse. L'auteur remercie également la direction du Groupe de Recherches en Economie de l'Energie de l'Université Laval pour son support financier.

L'économie des ressources naturelles a fait l'objet d'une revue récente de la littérature [30]. La revue, consacrée aux ressources naturelles définies comme ressources extractives renouvelables ou non, contient une section traitant de l'exploration des ressources non renouvelables et une autre traitant de l'incertitude dans la « théorie de la mine » ([30], p. 25-33). Le présent article se veut complémentaire à ces deux sections. Il développe certains aspects de l'exploration et de l'incertitude dans l'économie des ressources naturelles non renouvelables qui ne sont pas ou, selon nous, trop sommairement traités ou encore traités selon un point de vue différent dans ces deux sections.

2. Par exemple, Herfindahl [15] et [16].

3. Voir p. 580, note 36.

Le but de cet article est de faire l'inventaire de la littérature concernant la « théorie de la mine » en régime d'incertitude et les modèles stochastiques d'exploration. La première partie de l'étude définit l'exploration comme étant essentiellement une activité de recherche et d'accumulation d'information et passe en revue les contributions à la théorie économique de l'exploration et de l'incertitude sur le stock de la ressource. La deuxième partie fait état de la richesse de l'analyse théorique et empirique du processus aléatoire qu'est l'exploration. La troisième et dernière discute brièvement les possibilités d'incorporer les processus d'exploration dans un modèle d'optimisation dynamique fondé sur la théorie microéconomique en régime d'incertitude. Ce modèle devrait se composer, sous forme d'hypothèses ou de théorèmes, de résultats fondamentaux qui, à première vue, ne semblent pas incohérents mais sont dispersés dans la littérature et obtenus dans des systèmes très partiels.

SECTION I : ÉTAT DE LA THÉORIE ÉCONOMIQUE DE L'EXPLORATION

L'activité d'exploration des ressources naturelles non renouvelables a pour but la recherche et l'acquisition d'information au sujet des caractéristiques de nouvelles réserves (nouveaux stocks de minerai, hydrocarbures, etc.) dont l'existence et les caractéristiques sont sujettes à « grande » incertitude, à ajouter à un stock existant de réserves dont les caractéristiques sont connues avec davantage de certitude. L'incertitude et son degré sont des éléments essentiels de l'activité d'exploration sans lesquels la distinction exploration et développement cesse d'être fonctionnelle et devient purement anecdotique ⁴.

Le simple usage d'un opérateur d'espérance sur la valeur présente du rendement marginal de l'exploration à évaluer à son coût marginal ne constitue pas une théorie économique de l'exploration ⁵.

L'effort d'exploration, au sens où nous l'entendons, comprend quatre étapes :

- 1) la constitution d'un domaine minier à explorer ;
- 2) l'exploration de ce domaine au moyen de techniques géologiques, géophysiques et géochimiques ;
- 3) les sondages exploratoires ;
- 4) la consolidation des sondages exploratoires productifs [19].

A chacune de ces étapes correspondent des comportements écono-

4. Comme le dit R.J. Gilbert, « lorsque la distribution des coûts des gisements est connue et lorsque l'exploration ne pourvoit aucune information additionnelle concernant les caractéristiques du stock de la ressource, le processus de localisation et ensuite d'extraction est simplement une technique de production alternative à l'extraction à partir de gisements déjà identifiés » ([12], p. 1).

5. Comme dans [23].

miques qui ne peuvent être utilement distincts que si l'information concernant l'existence et les caractéristiques des réserves est imparfaite ⁶.

La constitution d'un domaine minier à explorer se fait sur la base d'information publique, donc non appropriée (par exemple, un relevé géologique effectué par l'Etat), ou d'indices provenant de domaines voisins ⁷. La constitution du domaine comporte bien entendu un coût d'acquisition qui est en général déterminé par un mécanisme d'enchères publiques. Ces mécanismes sont nombreux et dépendent d'un grand nombre d'éléments institutionnels. Ils donnent lieu à des comportements économiques « stratégiques » qui appartiennent à un cadre d'analyse différent de celui des comportements économiques dans l'incertain envisagés dans cette étude. Nous négligeons donc, dans ce qui suit, cette première étape d'ailleurs fort bien traitée dans [30].

La littérature de génie minier datant du début du siècle se divise en deux courants recommandant des politiques contradictoires concernant la présence d'incertitudes dans la gestion de la mine. L'un recommande un horizon minier plus long et une capacité initiale d'extraction plus petite qu'en régime de certitude. Cette politique équivaut à l'adoption d'un taux d'escompte inférieur au taux certain. L'autre recommande un taux d'escompte plus élevé que le taux certain. Cette politique recommande donc un horizon plus court et un taux d'extraction plus rapide qu'un régime de certitude.

En 1907, R.E. Browne remarquait qu'il était « opportun » pour la mine de « minimiser » les risques en construisant un capital fixe relativement petit au début de la phase d'extraction quitte à l'agrandir après que la phase d'extraction ait été bien engagée [2]. Cette politique équivaut à allonger la vie de la mine. T.J. Hoover justifie cette politique par le fait que les investisseurs démontrent en général de l'aversion pour le risque et préfèrent investir dans des mines dont les réserves sont prouvées avant le début de l'extraction ; l'extraction est alors assurée pour plusieurs années [2].

Les ingénieurs miniers appartenant à l'autre courant affirment qu'en cas d'incertitude sur les stocks de la ressource naturelle, le taux d'escompte à utiliser dans le calcul économique devrait être plus grand qu'en cas de certitude ⁸. Ils sont parfaitement au courant de l'impact en statique

6. Ceci ne veut pas dire que toute incertitude est éliminée lorsque le développement de la ressource commence. Seule l'extraction elle-même de la ressource élimine totalement l'incertitude sur la partie du stock produit. Toutefois, l'acquisition d'information est un des buts principaux de l'exploration tandis que la production est la fin primordiale de la phase de développement.

7. Ces indices peuvent prendre la forme d'externalités (par exemple, abandon d'un forage voisin) ou d'information appropriée (par exemple, acquise en contrepartie d'argent de forage sec, *dry hole money*).

8. Cette position est incorporée dans la formule d'Hoskold dont l'usage est très répandu dans les milieux miniers [31].

comparée de cet accroissement du taux d'escompte : le sentier optimal d'extraction se rapproche du présent, la capacité de production se trouve élargie et la vie de la mine est écourtée. La politique d'extraction recommandée par H.C. Hoover en 1909 est : « Production maximum par période sur un nombre minimum de périodes » [20]⁹. H. Louis a suggéré que le taux d'escompte certain devrait être corrigé par une constante multiplicative appelée « facteur de risque » qui serait le rapport du nombre d'échecs au nombre de succès des opérations minières dans une région déterminée [24]. Ce facteur de risque est supposé tendre vers 1 lorsque le nombre d'opérations devient très grand de telle manière que le taux « spéculatif » d'escompte ait pour limite le taux certain. A la suite de Pigou et d'I. Fisher, Busshau suggère que le facteur de risque de Louis soit décomposé lui-même en deux facteurs : un « facteur compensatoire » (« coefficient de probabilité » de I. Fisher et un paiement pour le port de l'incertitude par l'investisseur (« coefficient de prudence » de I. Fisher) c'est-à-dire une prime de risque [3]. Le facteur compensatoire « est une fonction non seulement du rapport des échecs aux succès mais aussi de leur distribution dans le temps et de la distribution et variation probable des paiements espérés dans le temps ». Le facteur de risque « augmente avec la dépense de capital parce que les accroissements additionnels de capital appliqués sous forme d'investissement dans une mine particulière seront sujets marginalement à des risques croissants de ne pas obtenir de rendement [positif]. Il est indépendant du temps mais non de la durée de la vie de la mine »¹⁰. Plus longue est la durée de la vie de la mine, plus petit est le facteur de risque puisque le nombre d'échecs minières par unité de temps décroît¹¹.

9. « Une considération additionnelle en faveur de l'exploitation rapide est la possibilité que des prix et taux de profit plus bas inhibent l'apparition de substituts, encouragent l'expansion des marchés et découragent l'entrée [dans l'industrie]. Pour toutes ces raisons, une période d'exploitation raccourcie réduit le risque d'entreprise et, toutes autres choses égales d'ailleurs, la réduction du risque est généralement considérée comme un développement favorable » ([31], 46-47). Ces arguments sont tirés de N.D. Fitzgerald [10] et D. Carlisle [5].

10. Pour tout ceci, voir [3] c. 2, p. 8 et suivantes. Busshau a admirablement résumé les contributions économiques de la littérature de génie minier antérieure à son ouvrage, rendant tout recours direct à celle-ci inutile.

11. « Le taux d'échecs ou taux de retrait des mines serait vraisemblablement élevé au début, quand le domaine a été à peine exploré. Ensuite, il tendrait à s'abaisser puisque les mines munies des réserves adéquates produiraient. Puis il s'élèverait rapidement au fur et à mesure que des développements nouveaux ne parviendraient pas à découvrir des quantités adéquates de minerai ou que les veines s'épuiseraient. Là où le domaine a été soigneusement exploré et ses propriétés géologiques, relevées, ces risques seraient soigneusement estimés et le taux de mortalité serait plus bas puisque moins d'entreprises sujettes à faibles chances de succès seraient engagées. En ouvrant un champ complètement nouveau, il semblerait inévitable qu'une grande partie du capital investi soit perdue pour toujours et, là où l'activité est dans les mains d'un certain nombre de petites entreprises, un grand nombre de celles-ci seraient vouées à l'échec » ([3], c. 2).

W. Paish a incorporé l'exploration dans son analyse de l'offre d'or et en reconnaît explicitement le caractère extrêmement aléatoire [29]. Il souligne que l'offre à long terme de minerai (l'or) est davantage « induite » par les forces économiques qu'« accidentelle ». Il reconnaît trois sources d'incertitude dans la théorie de la mine : incertitude sur le « contenu » de la mine (en quantité et qualité), incertitude sur les coûts futurs des facteurs de production et le prix à venir du minerai. Ces trois sources d'incertitude empêchent la mine d'atteindre la taille optimale qu'elle aurait eue en régime de certitude. La taille effectivement atteinte serait inférieure à cette taille optimale et d'autant plus inférieure que l'investissement en capacité est indivisible. Les raisons en sont les suivantes. Premièrement, l'incertitude diminue l'élasticité de l'offre de capital par rapport au profit. Deuxièmement, une erreur de prévision sur le contenu a des conséquences asymétriques. S'il s'agit de sous-estimation, il est toujours possible d'agrandir la taille de la mine ultérieurement, le coût de l'erreur est donc vraisemblablement faible. Si, au contraire, il s'agit de surestimation, l'investissement, probablement considérable, en capacité excédentaire et qui n'a guère d'usage alternatif (galeries, etc.) est presque entièrement perdu. Troisièmement, puisque la taille optimale de la firme dans l'incertitude est inférieure à l'optimum certain, la durée de la vie de la mine s'en trouve allongée. Au fur et à mesure que la mine est produite, l'incertitude sur le contenu diminue et la firme s'approche de sa taille optimale au régime de certitude. Il est bien clair que l'intuition économique de Paish était profonde et au moins partiellement correcte ¹².

D. Carlisle reconnaît que l'incertitude sur le « contenu » de la mine empêche la firme d'atteindre son optimum en régime de certitude [4]. Il est enclin à croire que la taille de la mine excédera l'optimum de certitude à cause de l'existence de réserves probables mais non prouvées. La taille excessive entraînera une augmentation générale des coûts et donc une quantité suboptimale d'exploration. Carlisle critique la pratique de l'augmentation du taux d'escompte pour tenir compte de l'incertitude des réserves parce que cette pratique fait dépendre l'incertitude du temps. Il n'y a aucune raison de croire que l'information concernant les réserves diminue au cours du temps, bien au contraire. L'augmentation du taux d'escompte a tendance à raccourcir la vie de la mine et ne fait rien pour diminuer l'incertitude. Les affirmations de Carlisle sur la taille de la firme se sont révélées fausses ¹³. Toutefois, ses commentaires sur le taux d'escompte, la vie de la mine et la quantité suboptimale d'extraction trou-

12. R.J. Gilbert a montré rigoureusement que l'extraction optimale en cas d'incertitude sur les stocks n'était jamais supérieure à l'extraction optimale au cas où ceux-ci sont remplacés par leur équivalent certain. La conclusion concernant la durée de la mine est fautive ; en fait la conclusion inverse est correcte ([13], p. 16).

13. Voir note précédente.

vent support au moins dans certaines circonstances, dans la littérature actuelle¹⁴.

Preston distingue les risques qui sont fonction du temps, dont il est possible de tenir compte dans le taux d'escompte, et ceux qui ne le sont pas [31]. Le risque sur la taille du stock est indépendant du temps parce qu'il peut soit augmenter soit diminuer avec le temps et ne peut disparaître que par l'accumulation d'information. Ce risque ne peut donc être pris en considération par le truchement du taux d'escompte. En pratique, l'incertitude sur le stock est prise en considération par l'exigence d'un taux de rendement élevé sur le capital et des estimations conservatrices de prix, de coûts et d'horizon. Preston reconnaît qu'en pratique l'exigence d'un taux de rendement élevé est équivalente à un taux d'escompte augmenté pour tenir compte de l'incertitude.

Ciriacy-Wantrup affirme que la pratique d'augmenter le taux d'escompte pour tenir compte du risque ne peut se justifier dans les cas où la distribution de probabilité de la variable à escompter n'a pas de mode unique et dans le cas où il y a risque de banqueroute [6].

Le risque de banqueroute peut être « minimisé » de quatre manières différentes :

1° *La flexibilité* : la flexibilité consiste à augmenter la liquidité des avoirs financiers et des capitaux circulants et à réduire la durée d'immobilisation des capitaux fixes. Cette réduction tend à augmenter le taux d'exploitation de la réserve et joue donc dans la direction d'une augmentation du taux d'escompte. La flexibilité s'applique aux incertitudes qui augmentent dans le temps.

2° *L'arbitrage compensatoire* (« *hedging* ») : ce facteur joue un rôle mineur dans l'économie des ressources naturelles non renouvelables parce que les marchés à terme ne couvrent pas une période de temps assez longue. Ce facteur tend à diminuer le taux d'exploitation.

3° *La compensation des risques* : ce facteur, par le jeu de la loi des grands nombres, diminue le risque collectif d'une classe statistique de producteurs, c'est-à-dire d'une classe de producteurs qui opèrent dans des conditions physiques et économiques similaires. Comme l'arbitrage compensatoire, ce facteur tend à diminuer le taux d'exploitation.

4° *La distribution des risques* : certains risques sont des événements uniques qui affectent tous les producteurs d'une classe statistique de la même manière mais différentes classes statistiques de manière différente. Ces risques sont par exemple des changements technologiques, des changements de demande ou la découverte de nouvelles réserves. Ces risques ne peuvent pas être compensés dans la même classe statistique mais peuvent être réduits en les distribuant sur les différentes branches d'une firme produisant plusieurs produits sur différentes firmes, industries ou

14. Voir p. 567.

régions géographiques. Comme les deux facteurs précédents, celui-ci tend à diminuer le taux d'exploitation.

P. Massé, en traitant de la gestion des réservoirs en 1946, a examiné et résolu des problèmes analogues à ceux de la gestion des ressources naturelles non renouvelables [27]. Comme règle de régularisation, il a en avenir certain et fini pour un barrage à capacité infinie, retrouvé la règle de Gray-Hotelling : l'exploitation optimale du réservoir correspond à un profit marginal escompté constant sur l'horizon et égal au profit marginal sur le stock restant de la ressource. Ce profit marginal sur le stock est un coût d'usage. Masse n'utilise pas ce dernier terme. Il l'appelle « un coût de production » qui « n'est autre chose en effet que le profit futur dont on se prive — ou le manque à gagner futur qu'on encourt — pour ... réaliser le supplément de profit immédiat correspondant... » (vol. 1, p. 90). Ce coût de production « s'identifie ainsi avec le prix auquel, dans une transaction équitable, l'exploitant céderait une unité de son stock (vol. 2, pp. 37-38). La conséquence de cette règle est que la réserve ne peut s'épuiser en temps fini contrairement à l'horizon infini où « l'exploitation optimum tend systématiquement à épuiser la réserve » (vol. 1, p. 134). P. Masse, en développant ces résultats, reconnaît une dette à R. Giguët [11]. Masse a d'une certaine manière généralisé au régime d'incertitude la règle de Gray-Hotelling dans la mesure où le profit marginal doit maintenant toujours être égal à l'espérance marginale de profit attachée au stock. L'espérance marginale est la dérivée de l'espérance totale par rapport au stock. Masse cherche en fait un contrôle avec information en retour qu'il appelle effet de régulation. La même interprétation de coût d'usage tient au régime d'incertitude (vol. 2, p. 39). L'effet de régulation a un caractère ergodique, c'est-à-dire qu'il est sujet à une loi de probabilité limite indépendante des conditions initiales. Masse examine également le problème de la limitation du risque c'est-à-dire celui de limiter à un niveau donné d'avance le risque de voir survenir une fois au cours d'un horizon un événement désastreux tel que l'abaissement des réserves en dessous d'un certain niveau.

En 1959, Massé a examiné une forme simplifiée du problème de l'influence de l'incertitude affectant l'étendue de la réserve sur l'horizon et la cadence d'exploitation optimale d'une ressource naturelle non renouvelable [28]. Il reconnaît dans cette analyse une dette à Billiet. Sous les hypothèses de prix et de coûts moyens d'investissement constants sur l'horizon et de deux états de la nature affectant l'étendue de la réserve, des résultats analogues au cas certain sont obtenus. La durée optimale d'exploitation est indépendante du niveau des réserves. La cadence optimale d'exploitation est unique et constante au moins à l'intérieur de deux intervalles de cadences possibles et continue sur tout l'horizon. Moyennant des conventions supplémentaires (en particulier

d'intérêt égal à l'unité par changement approprié de l'échelle des temps), il montre que la cadence optimale dans le premier intervalle correspond à l'équivalent certain des réserves et dans le second intervalle, à une proportion de la réserve dans le premier état. Il montre également, moyennant certaines hypothèses, que l'application du critère maximin par l'entreprise est équivalente au problème précédent lorsque les probabilités des deux états sont voisines d'un demi.

O.C. Herfindahl s'est efforcé de montrer que ni la nécessité de l'activité d'exploration (pour remplacer les gisements épuisés) ni son rendement incertain ne différencient fondamentalement l'industrie minière de l'industrie manufacturière. Il a montré qu'il existait une relation systématique bien qu'aléatoire entre l'effort d'exploration, le volume des stocks et les attentes de profit. Cette relation est d'autant plus systématique que l'industrie tend vers l'équilibre à long terme par la compensation des risques individuels [16]. Herfindahl examine en particulier l'impact de l'allure des courbes de coût d'exploration sur l'équilibre de la mine et de l'industrie [15].

F. Fisher est le premier à avoir fait une étude rigoureuse et économétrique de l'exploration en introduisant explicitement dans son analyse une variable reliée à l'incertitude, le taux de succès des sondages [9]. Il a montré que la relation entre l'effort d'exploration et son rendement en termes de réserves nouvelles n'était pas simple. Cette relation elle-même est modifiée par les stimuli économiques. L'offre d'effort exploratoire est plus élastique au prix que l'offre de la ressource elle-même à cause de la sensibilité au prix du taux de succès et de la taille moyenne des réserves découvertes. Fisher a également introduit la notion de stock de territoires incomplètement explorés. Ce stock est formé de territoires à rendement espéré trop faible ou à rendement relativement trop risqué au prix courant de la ressource. Fisher a testé l'effet d'entraînement (d'« horizon ») sur l'activité d'exploration créé par des découvertes de taille importante. Il a mis en question la validité du taux de succès comme mesure objective du risque d'exploration, le taux de succès étant plutôt une mesure du risque accepté par l'industrie.

Dasgupta et Heal traitent de manière très restrictive du problème de la disponibilité d'un substitut à une ressource naturelle essentielle à la production ou à la consommation [7]¹⁵. L'incertitude concerne non l'existence du substitut mais le moment auquel il deviendra disponible. La découverte d'un nouveau gisement de la même ressource peut être considérée comme un substitut. Les hypothèses très restrictives de l'analyse sont les suivantes. Premièrement, la probabilité d'épuiser la ressource

15. Une ressource est essentielle si l'une ou l'autre des conditions suivantes est remplie : (1) la productivité marginale de la ressource est sans limite quand sa production tend vers zéro, (2) la production de biens de consommation est nulle sans la ressource.

essentielle provenant d'un gisement existant avant la découverte d'un deuxième gisement est nulle. Deuxièmement, la date de la découverte du deuxième gisement ne peut être influencée par l'acquisition d'information supplémentaire ou généralement par une action quelconque. Troisièmement, lors de la découverte du deuxième gisement, la valeur du premier tombe à zéro (de même que le stock de capital existant pour son exploration). Dans ces hypothèses, la politique d'extraction optimale est d'agir comme si le deuxième gisement ne devenait jamais disponible en utilisant un taux d'escompte plus élevé que le taux certain pour tenir compte de l'incertitude. D'une certaine manière, Dasgupta et Heal ont confirmé l'intuition de Carlisle : augmenter le taux d'escompte pour tenir compte de l'incertitude ne peut se justifier si l'incertitude sur la date à venir de la découverte peut être influencée par des actes comme l'acquisition d'information supplémentaire, ce qui est l'essence de l'exploration.

Cette analyse est poursuivie par Dasgupta et Stiglitz dans le cadre de différentes structures de marché en relâchant la troisième hypothèse de Dasgupta et Heal [8]. Elle montre que les structures non concurrentielles favorisent des politiques d'extraction plus conservatrices qu'en concurrence parfaite. De plus, en concurrence parfaite, le caractère conservateur de la politique d'extraction dépend de la taille du stock. Si le stock est suffisamment grand, la politique d'extraction sera plus conservatrice en régime d'incertitude qu'en avenir certain. Dans tous les cas, la découverte d'un substitut entraîne la chute du prix de la ressource.

C. Henry traite du problème de l'irréversibilité dans l'incertitude [14]. Il montre que si le problème est dynamique (séquence de décisions), s'il y a possibilité d'acquérir davantage d'information, si certaines décisions sont moins irréversibles que d'autres et s'il y a indivisibilité, la décision optimale donne lieu à la valeur d'option positive¹⁶. Si on relâche l'hypothèse d'indivisibilité, l'option d'utiliser davantage d'information conduit à moins de décisions irréversibles. Ces résultats d'Henry sont intéressants parce que l'exploration des ressources non renouvelables satisfait à toutes les hypothèses sauf la quatrième. L'exploration et ses résultats sont largement divisibles. Puisque, dans ce cas, la solution optimale conduit à moins de décisions irréversibles, il semblerait intuitif de déduire de l'analyse d'Henry que l'extraction annuelle de la ressource non renouvelable, c'est-à-dire l'acte irréversible, conduit à une extraction annuelle moindre qu'en cas de certitude comme l'avait entrevu Paish¹⁷.

Stiglitz montre qu'en général l'absence de marché à terme et pour les risques augmente l'instabilité des marchés des ressources et donc affecte l'efficacité de l'extraction à cause de l'absence de mécanismes produisant un prix correct [38].

16. Voir [14], p. 89 pour la définition de valeur d'option.

17. Voir p. 563.

Certaines intuitions de Paish, Carlisle ainsi que la conjecture basée sur les travaux d'Henry ont obtenu confirmation dans des travaux encore non publiés de R. J. Gilbert [12] [13]. Gilbert montre d'abord que le taux optimal d'extraction d'une ressource dont le stock est incertain est toujours inférieur au taux optimal d'extraction de l'équivalent certain du stock à la période initiale si la distribution de probabilité du stock est bornée supérieurement [12]¹⁸. Un résultat analogue plus faible est disponible pour les autres périodes (temps continu, horizon infini) : le taux optimal d'extraction n'est jamais supérieur au taux optimal correspondant à l'équivalent certain. Ces résultats sont basés sur les hypothèses suivantes. Premièrement, il n'y a ni exploration — pas d'acquisition d'information au-delà de celle donnée par la production elle-même — ni possibilité de stockage. Deuxièmement, les préférences, le taux d'intérêt et la technologie sont supposés constants. Troisièmement, l'utilité de la consommation est concave¹⁹. Si l'utilité est bornée inférieurement, la ressource sera épuisée en temps fini avec une probabilité strictement positive contrairement au cas certain où le stock n'est pas épuisé en temps fini.

En utilisant des hypothèses très semblables à celles de Gilbert, M. Kemp a montré que le sentier optimal d'expansion de la ressource n'était pas nécessairement monotone (contrairement au cas certain) et que donc la pratique d'accroître d'une quantité constante le taux d'es-compte pour tenir compte de l'incertitude était généralement dénuée de justification théorique [22].

Toujours en utilisant grosso modo le même schéma d'hypothèse que Gilbert et Kemp, Loury a montré que l'allocation concurrentielle des ressources n'était pas optimale qu'il y ait ou non possibilité d'exploration [25]. Ce résultat est dû au fait que le niveau des réserves possédées par les firmes (l'état de la nature) ne pouvait être connu jusqu'à leur consommation complète. En conséquence, les contrats à terme contingents à l'état de la nature n'ont aucun sens puisque celui-ci dépend des actions des agents. Il y a donc un problème de risque moral. De plus, les probabilités que les consommateurs assignent aux livraisons à venir de la ressource devraient pouvoir être révisées à chaque date à la lumière de l'information que la ressource n'est pas épuisée. Les agents désireraient alors pouvoir procéder à des échanges après la date initiale du marché. Les firmes pourraient également « tricher » en vendant des contrats à terme sur leurs avoirs en ressource qu'elles savent être épuisés.

18. Ce résultat est aussi obtenu par Loury [25]. Loury montre également que plus l'incertitude du stock est « grande », plus la consommation initiale sera grande moyennant certaines hypothèses.

19. Il existe une quatrième hypothèse qui est superflue si l'on considère le cas d'une seule firme : les agents économiques sont supposés être d'accord sur la spécification de l'incertitude.

En modifiant la première hypothèse de son premier modèle et en ajoutant une quatrième, Gilbert obtient des résultats supplémentaires [12]. La première hypothèse est remplacée par la suivante : l'extraction produit de l'information concernant le stock et il existe une possibilité de stockage de la ressource à coût nul. La quatrième hypothèse pose la ressource comme essentielle. Il n'est alors jamais optimal de retarder l'exploration jusqu'à l'épuisement des réserves connues²⁰. D'autre part, il est optimal d'explorer jusqu'à ce que le taux de rendement de l'exploration soit égal au taux d'intérêt. Finalement, un accroissement de la variance du rendement de l'exploration, toutes autres choses égales d'ailleurs, avance la date optimale de l'exploration si la rente imputée du stock est une fonction convexe du stock. Ces trois propositions sont fondées sur une définition très restrictive de l'activité d'exploration. Explorer signifie extraire d'un gisement de taille incertaine à un coût marginal constant, pour consommation ou stockage plutôt que produire le stock de réserves connues à coût d'extraction nulle.

Cette définition de l'exploration est ingénieuse dans la mesure où elle permet de dissocier dans une certaine mesure en deux produits séparés les produits joints que sont l'extraction de la ressource et la production d'information²¹. On peut produire simplement pour acquérir de l'information aujourd'hui et consommer demain par mise en stock. Toutefois cette dissociation n'est pas possible pour l'extraction visant la consommation immédiate. Le désavantage de cette formulation est qu'elle suppose l'élimination totale de l'incertitude sur le stock produit par l'extraction sans permettre d'acquérir de l'information sans produire. En d'autres termes, l'allocation à venir de la production peut être séparée de l'allocation à venir de l'incertitude.

Dans une deuxième étude, la définition donnée à l'exploration par Gilbert est différente [13]. L'exploration est une simple technique de localisation à un coût des gisements de telle manière que l'exploitation se fasse dans l'ordre des coûts croissants. L'analyse repose sur quatre hypothèses : les agents économiques sont indifférents au risque, les gisements sont statistiquement indépendants, la distribution d'échantillonnage est connue et il est impossible d'acquérir de l'information à un coût. La définition de l'exploration est donc complètement dissociée de l'acquisition d'infor-

20. Ce résultat peut être considéré comme intuitif si l'on considère l'exploration immédiate comme étant l'élimination d'une « incertitude immédiate » : on élimine l'incertitude avant que la décision d'allouer la ressource entre la consommation présente ou à venir soit prise. Retarder l'exploration jusqu'à ce que la ressource soit épuisée est l'élimination d'une « incertitude temporelle » : on élimine l'incertitude après que la décision d'allouer la ressource entre la consommation présente et à venir ait été prise. Puisqu'une « incertitude temporelle » n'est jamais préférée à une « incertitude immédiate », la proposition de Gilbert suit. Voir à ce sujet J. Dreze et F. Modigliani, « Consumption Decisions under Uncertainty », *Journal of Economic Theory*, vol. 5, 1972, 308-335.

21. Cette définition est déjà implicitement présente dans [27] vol. 1, p. 61.

mation et est donc très artificielle. Dans le cas où l'exploration correspond à l'acquisition non gratuite d'information, il est montré par un exemple seulement que l'investissement en exploration peut ne pas être le même sur tous les territoires possibles même s'ils sont à priori identiques.

Ce survol de la littérature a montré qu'aucun auteur jusqu'à présent n'avait été capable de formuler une théorie économique générale de l'exploration de manière satisfaisante. Il a montré également qu'il n'existe aucune recette simple comme l'augmentation du taux d'escompte, pour rendre compte de l'incertitude sur le stock. L'analyse de l'impact de celle-ci n'a fourni que des résultats qualitatifs très généraux à l'exception de la période initiale où des résultats plus précis ont été obtenus.

SECTION 2 : RICHESSE DE LA SPÉCIFICATION DES MODÈLES STOCHASTIQUES D'EXPLORATION

Contrairement à la littérature économique qui a outrageusement simplifié le traitement de l'exploration des ressources naturelles, le processus stochastique qui accompagne l'exploration a fait l'objet d'études très minutieuses tant de la part des géologues que des économistes. Avant d'examiner les modèles d'exploration eux-mêmes, il faut analyser les processus stochastiques sensés déterminer la taille des réserves dans la nature.

2.1 *Distribution des réserves minières et d'hydrocarbures par taille*

La distribution lognormale a été appliquée à la taille, à la teneur en minerai, etc., de différentes réserves minérales et d'hydrocarbures avec beaucoup de constance et de succès. Une des premières études empiriques sur ce sujet fut faite en 1940 par N.K. Razumovsky qui montra les applications multiples de la loi lognormale à la teneur en minéraux des rocs [69]. Ce caractère quasi universel de la loi lognormale suggéra à A.V. Kolmogorov l'élaboration d'une théorie stochastique des broyages géologiques successifs qui aboutirait asymptotiquement à un processus lognormal de génération des tailles actuellement existantes des minéraux [58]. L'exposé mathématique de cette théorie fut ensuite simplifié par B. Epstein [49] [50]. En 1953, la distribution lognormale acquiert droit de cité en géochimie grâce à la loi fondamentale de la géochimie de L.H. Ahrens qui dit que la concentration d'éléments chimiques déposés à la suite de réactions chimiques naturelles tend à être lognormale [33] [34] [35] [36] [68] [74]. A.B. Vistelius a généralisé et raffiné cette loi en substituant à la distribution lognormale, distribution positivement asymétrique. Cette généralisation est basée sur le fait que Vistelius a trouvé que rarement l'hypothèse nulle de lognormalité pouvait s'accepter avec un niveau de confiance élevé [79]. Cette généralisation de Vistelius doit probablement s'étendre à tout le domaine d'application de la distribution lognormale aux tailles, à la teneur en minerai, etc., des réserves.

J.Y. Thébaut suggère d'appeler ces distributions positivement asymétriques dont le caractère lognormal ne résiste pas aux tests traditionnels, « lognormaloïdes » [75]. En 1951, D.G. Krige montre comment la théorie de l'inférence statistique basée sur la loi lognormale permet d'évaluer les réserves minières [60]. En 1955, G. Matheron justifie les erreurs systématiques d'échantillonnage de teneur en minéraux et leurs corrections habituelles (Krige, De Wÿs) par la loi lognormale [65]. Les études de Thébaut, Krige, G. Kaufman confirment toutes les caractères lognormaloïde des distributions d'une série de caractéristiques des réserves minières et d'hydrocarbures [54] [55] [56] [73]. R.G. McCrossan a montré que fréquemment les distributions apparemment lognormales de réserves de pétrole ne provenaient pas de la même population et étaient en fait bimodales [64].

Quoi qu'il en soit de la validité des fondements géologiques (théorie des broyages) et géochimiques (loi de l'action de masse) de la loi lognormale, il semble que l'universalité empirique de la lognormaloïde permette de supposer qu'en première approximation au moins les distributions des tailles des réserves minières et d'hydrocarbures et des réserves minières en teneur dans la nature sont lognormales. La distribution lognormale est souvent commode à utiliser analytiquement. Aucune autre distribution positivement asymétrique n'a pu remplacer effectivement la distribution lognormale est souvent commode à utiliser analytiquement. Aucune autre distribution positivement asymétrique n'a pu remplacer effectivement la distribution lognormale dans les études empiriques avec le même degré d'universalité et d'avantages analytiques. On ne peut s'empêcher ici de faire un certain rapprochement avec le rôle joué par le mouvement brownien géométrique dans la théorie du comportement des prix à terme bien que dans ce cas l'évidence empirique en faveur de l'hypothèse alternative soit plus considérable²². Toutefois, il ne faut pas négliger l'existence de nombreuses difficultés d'estimation des distributions lognormales (troncature, censure, etc.)²³.

2.2. Les modèles stochastiques d'exploration

La première contribution à la construction d'un modèle stochastique de l'exploration est due à J. Hayward en 1934, qui applique à l'acquisition d'un territoire à explorer une formule élaborée en 1878 par A. Whitworth pour déterminer le montant optimal à investir dans une loterie de manière à n'avoir ni profit ni perte²⁴. Le calcul de la formule a été raffiné par S. Pirson en 1941. Celui-ci a également considéré diverses applica-

22. Voir p. 580, note 36.

23. Voir [37] à ce sujet pour les méthodes d'estimation. La troncature est discutée p. 26 et la censure résulte du fait que les gisements de taille sub-commerciale ne sont pas toujours enregistrés dans les statistiques.

24. Voir [51], p. 289-290, n° 4 et [63], p. 130-131 et [53] [80].

tions du calcul des probabilités afin de déterminer les mérites respectifs de différentes méthodes d'exploration y compris leur fiabilité [67]. En 1951 et 1956, F.H. Lahee est le premier à avoir essayé empiriquement de déterminer la probabilité de découvrir un champ de pétrole d'une taille donnée au moyen d'un forage. Sa méthode consiste à multiplier le taux de succès des forages (considéré comme mesure de la probabilité de découverte) par la probabilité (conditionnelle à un succès) de découvrir un champ d'une taille donnée [61] [62]. Les efforts de Hayward et Pirson ne supposaient ni l'existence d'un processus stochastique déterminé ni celle d'une distribution d'échantillonnage. Lahee est le premier à avoir identifié empiriquement l'asymétrie positive de la distribution selon la taille des nouveaux champs de pétrole découverts.

En 1956 également, M. Allais élabore un modèle stochastique d'exploration qui formalise la distinction logique entre processus de découverte et processus conditionnel de « forage » d'un gisement de taille donnée [38]. L'activité d'exploration est divisée par Allais en trois étapes chronologiquement distinctes :

- 1) la recherche des indicateurs ;
- 2) l'évaluation des indicateurs ;
- 3) le forage ²⁵.

La superficie à explorer est quadrillée en zones élémentaires de telle manière que chaque tirage d'une zone élémentaire puisse être considéré comme indépendant.

La fréquence absolue des observations aux trois étapes est supposée être distribuée dans chaque zone élémentaire selon la loi de Poisson, c'est-à-dire les indicateurs favorables et les gisements. La loi de Poisson ou processus de Poisson spatialement homogène se trouve vérifiée et est adoptée a priori parce qu'elle est la loi des événements « rares ».

La taille des gisements à l'étape trois est supposée être lognormale. Du point de vue économique, seuls les gisements dont la valeur marchande couvre au moins les dépenses d'exploration sont considérées. La lognormale est donc tronquée inférieurement. L'asymétrie positive de la distribution des réserves implique que quelques grands gisements dont la probabilité est faible représentent une proportion considérable des gisements existants. On ne peut donc se fier à la loi des grands nombres pour découvrir un gisement de grande taille. Il est nécessaire de développer une stratégie de l'exploration qui va maximiser la probabilité de « tirer » ces grands gisements. D'autre part, comme la lognormale a une queue droite infinie, il est indispensable de la tronquer à droite. Cette deuxième opération est très délicate surtout pour des territoires inexplorés ²⁶. Com-

25. Les deux premières étapes définies par Allais correspondent à la deuxième étape de la définition de l'exploration donnée p. 560.

26. Voir [38], p. 292.

me le modèle est supposé s'appliquer à un vaste territoire inexploré, la modification des paramètres des distributions de Poisson et lognormale au cours du déroulement de l'exploration est implicitement considérée comme négligeable. Les valeurs des paramètres inconnus sont empruntées à ceux de territoires déjà bien explorés.

Allais montre qu'il est nécessaire d'entreprendre l'exploration sur une grande échelle pour « maximiser » la probabilité du succès, c'est-à-dire le complément de la probabilité de ruine. L'usage de la probabilité de ruine à cet effet est difficilement acceptable. La probabilité de ruine n'a de signification que si l'on suppose que la « partie » peut être jouée plusieurs fois, que les gains des jeux précédents sont immédiatement disponibles et que les probabilités demeurent les mêmes au cours du temps²⁷. Ces trois hypothèses sont clairement violées dans le jeu de l'exploration.

Puisque la probabilité de succès financier augmente géométriquement avec la taille du programme d'exploration, l'activité d'exploration est clairement sujette à rendements croissants à l'échelle. Ce phénomène est dû au jeu de la loi des grands nombres du point de vue théorique. Empiriquement, on observe que l'activité d'exploration est fréquemment concentrée dans les mains de grandes compagnies qui concentrent leur activité de recherche sur les grandes découvertes²⁸.

Alors qu'Allais avait élaboré un modèle pour de vastes régions inexplorées, Arps et Roberts en 1958 construisirent un modèle pour une région géologiquement homogène et déjà partiellement explorée [39]. Leur modèle n'est pas stochastique. Il incorpore toutefois trois caractéristiques fondamentales de l'exploration. La première est le caractère hypergéométrique (« sans remise ») de l'exploration sur un territoire déjà partiellement exploré. La seconde est que la probabilité de tirer un gisement de taille donnée est proportionnelle à cette taille (il s'agira en fait de sa superficie aérienne plutôt que de son volume). La deuxième caractéristique explique la raison pour laquelle les grandes découvertes ont tendance à se faire antérieurement dans le développement chronologique de l'exploration. La première caractéristique renforce la seconde dans son explication. La troisième caractéristique de l'exploration est que celle-ci est un processus d'accumulation d'information et n'est pas une méthode de sondage purement aléatoire. Vu l'existence de méthodes d'acquisition d'information, la probabilité de succès est plus élevée que celle qui serait obtenue par un mécanisme purement aléatoire. Chaque méthode d'exploration est grossièrement représentée par une constante multiplicative sans dimension plus grande que un ; un correspond au forage purement aléa-

27. Voir W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, Wiley, 1950, seconde édition, p. 313 et suivantes.

28. [31], p. 70-76.

toire. Le modèle est caractérisé par une équation différentielle dont l'interprétation est la suivante : le nombre de réservoirs d'une superficie donnée découverts après un certain nombre de forages est une fonction croissante du nombre de forages additionnels, de la superficie aérienne du réservoir ou gisement, de la méthode d'exploration (caractérisée par une constante) et du nombre de réservoirs ou gisements restant à découvrir. Le modèle permet d'« estimer » le nombre de gisements d'une superficie donnée existant dans la nature.

En 1960, Grayson utilise la théorie de la décision bayésienne pour formaliser les comportements des agents engagés dans l'exploration [51]. L'étude se situe à un niveau plutôt descriptif sans s'engager dans la discussion des processus stochastiques. Dans la même ligne d'analyse bayésienne, G. Kaufman en 1963 propose deux modèles stochastiques d'exploration [54]. L'un d'entre eux incorpore le processus lognormal et en développe l'analyse postérieure au cas où la variance est connue et la distribution à priori est aussi lognormale. Ce modèle tient également compte d'une propriété importante des tailles révisées des gisements découverts. La taille d'un gisement une fois découvert est sujette à erreurs de mesure considérables, erreurs qui décroissent au fur et à mesure de la production des gisements [40]. Kaufman suppose que les estimations révisées sont également lognormalement distribuées. Kaufman incorpore deux caractéristiques empruntées à Arps et Roberts à savoir que la probabilité de découverte d'un gisement est proportionnelle à sa superficie aérienne et à la méthode d'exploration utilisée, caractérisée par une constante. L'analyse bayésienne sur la distribution lognormale conduit à des difficultés logiques et mathématiques sérieuses. L'imposition d'une distribution lognormale à priori sur la moyenne de la distribution ne peut se justifier sur des bases intuitives. Deuxièmement, si la variance de la distribution lognormale de la population est inconnue, la distribution postérieure a des moments infinis²⁹.

En 1963, G. Matheron et P. Formery proposent dans une ligne non bayésienne un modèle qui détermine le volume optimal des travaux de reconnaissance nécessaires pour procéder à l'estimation des réserves d'un gisement minier (66). Le modèle permet de choisir entre trois décisions possibles : abandonner, exploiter ou faire une nouvelle tranche de travaux de reconnaissance. Si la décision d'exploiter est prise, les réserves sont évaluées avec une marge d'erreur tant sur le tonnage que la teneur. La cadence et la coupure sont déterminées en utilisant un taux d'escompte nul dont l'usage est fondé sur la pratique et la « moralité » minières.

En 1965, G. Kaufman offre une version stochastique du modèle d'Arps et Roberts [55]. Il raffine son traitement antérieur de la proba-

29. Voir A. Zellner, « Bayesian and non-Bayesian Analysis of the Lognormal Distribution and Lognormal Regression », *Journal of the American Statistical Association*, 1971, vol. 66, 327-330.

bilité de découverte et du processus stochastique engendrant les tailles des découvertes en incorporant explicitement le caractère hypergéométrique de l'échantillonnage. La probabilité de découverte dépend de la superficie aérienne des gisements, elle-même supposée être distribuée selon la distribution lognormale. Le caractère hypergéométrique de l'échantillonnage est obtenu par la différence de deux distributions lognormales, l'une estimée et correspondant à celle existant dans la nature, l'autre correspondant à celle obtenue après un certain nombre de forages. L'ennui de cette formulation est que la différence de deux lognormales n'étant pas nécessairement lognormale, la distribution résultant de la différence ne peut être caractérisée analytiquement³⁰. La probabilité de découvrir un gisement d'une taille donnée est le produit de la probabilité de découverte par la probabilité conditionnelle d'obtenir un gisement d'une taille donnée. Le caractère hypergéométrique d'épuisement des distributions existant dans la nature des superficies aériennes et des tailles des gisements affecte l'une et l'autre de ces probabilités. Toute possibilité d'élaborer une procédure statistique d'estimation semble donc vouée à l'échec. Ceci est un grand défaut du modèle dont l'une des tâches est l'estimation du nombre de gisements existant dans la nature.

Crabbé, en 1969, a suggéré une méthode pour estimer le nombre de gisements d'une superficie aérienne donnée, existant dans la nature ainsi que le nombre de gisements d'une superficie aérienne donnée découverts après un certain nombre de forages additionnels [46]. Il a également montré que l'on pouvait interpréter le modèle de Kaufman (1965) comme une fonction de production stochastique sujette à rendements décroissants en termes de forages mesurés en unités d'efficacité technique. Alternativement, l'information ou les méthodes d'exploration considérées comme intrants dans la fonction de production sont également sujets à rendements décroissants. Crabbé a finalement montré que la solution analytique du modèle de Kaufman requérait la troncature à droite des distributions lognormales si l'on voulait résoudre certaines intégrales du modèle par les transformées de Laplace. Les solutions proposées par Crabbé ne permettent pas toutefois de donner une base stochastique à une procédure d'estimation. Quoique les travaux de Arps et Roberts ainsi que ceux de Kaufman demeurent importants sur le plan de la spécification du modèle d'exploration, ils sont voués à l'échec dans la mesure où ils ne permettent pas de donner une base statistique aux procédures d'estimation requises.

En 1970, Uhler et Bradley ont repris le modèle d'Allais pour l'appliquer aux Territoires du Nord-Ouest canadien [77]. La seule modification du modèle Allais est l'utilisation d'un processus de Pascal (binomiale négative) plutôt qu'un processus de Poisson pour la découverte. L'intérêt

30. Voir cependant [76].

du processus de Pascal est qu'il peut être engendré de très nombreuses manières et en particulier à partir de processus de Poisson non homogènes (processus de Poisson dont le paramètre est lui-même aléatoire) qui permettent d'expliquer le caractère spatialement non homogène d'agglutination des gisements observés dans la nature. En se référant à l'expérience de l'Alberta pour estimer leurs paramètres, Uhler et Bradley ont montré la supériorité empirique du processus de Pascal.

En 1966, J.C. Griffiths avait déjà recommandé l'usage de la binomiale négative à cause de sa supériorité théorique (agglutination) et empirique [52]. Il est le premier à avoir essayé, en se basant sur des travaux de J.H. Engel, d'appliquer des rudiments de théorie de la recherche optimale à l'exploration [48]. Il a également recommandé un programme de forage systématique avec espacement de cinq à six milles dont les avantages seraient, d'une part, de n'être pas plus coûteux que les programmes historiques d'exploration et, d'autre part, de ne pas pouvoir manquer les champs les plus grands. O.C. Herfindahl a critiqué cette recommandation sur la base du fait que Griffiths a négligé l'escompte et la distribution dans le temps des bénéfices et des coûts dans ses calculs économiques [17].

En 1973, P. Bradley et G.M. Kaufman ont élaboré un modèle qui met l'accent sur la rentabilité d'une découverte dans un territoire inexploré comme l'Arctique, pour lequel le caractère exhaustif de l'échantillonnage est négligeable [44]. Il s'agit d'estimer le revenu net de cette découverte à partir de paramètres économiques certains (et exogènes) et de certaines variables physiques aléatoires indépendantes mais observables après consolidation du forage. La distribution de la variable économique fondamentale, l'investissement de développement, reliée non linéairement aux variables physiques est estimée par des méthodes Monte-Carlo à partir de 4 catégories d'investissements. La première est l'investissement de forage qui est fonction de la profondeur du forage selon la forme fonctionnelle que lui a donnée F. Fisher [9]. La deuxième est l'investissement en installations productives de surface, qui dépend de la capacité de production selon la formule des six dixièmes adoptée dans l'industrie chimique et du nombre de forages de développement. La troisième est l'investissement en installations de campement également supposée être fonction de la capacité de production. La quatrième n'est pas à proprement parler un coût de développement mais plutôt le coût d'opération capitalisé supposé être une fonction du nombre de forages. Les coûts d'exploration sont omis de l'analyse.

La même année Kaufman et Bradley reviennent sur le modèle Arps-Roberts-Kaufman (1965) pour essayer d'en formuler une fonction de vraisemblance maximale [57]. Pour cela, il est nécessaire d'éliminer les différences de distributions lognormales existant dans le modèle antérieur sans pour autant négliger le caractère hypergéométrique de l'exploration.

Il est tenu compte de ce dernier seulement dans la probabilité de découverte par l'élimination de territoires déjà explorés des territoires demeurant à explorer. Une des composantes de la probabilité de découverte est le rapport de l'aire des gisements à explorer à l'aire des territoires à explorer. Ce rapport est une mesure grossière de l'état de la technologie de l'exploration. L'acquisition d'information ne peut exister que sous forme de forages.

Un deuxième modèle, cette fois de distribution spatiale des gisements, est considéré. Sa caractéristique est de permettre l'agglutination des gisements. Le processus de Poisson non homogène adopté par Uhler et Bradley est critiqué parce que l'ajustement est jugé défectueux dans la queue droite et parce que le processus ne parvient pas à reproduire l'agglutination empiriquement observée sur un territoire bien exploré. Le modèle consiste en un treillis de nombres entiers équipé d'un cheminement aléatoire symétrique sur lequel est incorporé un autre processus aléatoire muni de règles d'arrêt qui détermine s'il y a gisement ou non.

En 1973 toujours, J.T. Ryan essaie de remplacer la constante technologique d'Arps et Roberts par deux fonctions [70]. Deux candidats sont proposés : la logistique simple et une fonction de saut zéro-un (le un correspondant à la découverte d'un nouvel « horizon »). La première fonction suppose que la connaissance est monotone et progressive. Elle donne de bons résultats sur des données agrégées. La deuxième suppose que la connaissance géologique est discontinue. Celle-ci donne de meilleurs résultats sur des données groupées par « horizon ». La fonction de saut zéro-un est préférée parce qu'elle tient explicitement compte de la découverte de nouveaux horizons alors que la fonction logistique fait, qu'on le veuille ou non, implicitement des hypothèses sur l'existence, la découverte et la taille de nouveaux horizons. Le modèle suggéré est déterministe et suppose en outre que les réserves à découvrir sont proportionnelles à la différence entre les réserves ultimes et les réserves cumulatives déjà découvertes [71].

En 1975, Kaufman, Balcer et Kruyt continuent de raffiner le modèle Arps-Roberts-Kaufman (1965) [56]. Tout d'abord l'hypothèse de lognormalité des tailles est à nouveau testée vis-à-vis cette fois de l'hypothèse gamma pour la distribution des tailles. L'hypothèse de lognormalité est préférée pour la zone interquartile mais les queues droites des distributions observées sont plus épaisses que celles que l'on obtient en cas de lognormalité [47]. Ce phénomène empirique s'explique par l'hypothèse que la probabilité d'obtenir une taille donnée est proportionnelle à cette taille. Deuxièmement, le modèle est supposé s'appliquer à un territoire homogène du point de vue géologique, c'est-à-dire un horizon. Troisièmement, les hypothèses économiques et physiques du modèle sont séparées. Les variables économiques sont supposées influencer le nombre de foras-

ges à l'intérieur d'un horizon. Elles n'influencent pas la probabilité de découverte ou la taille d'une découverte. Ces dernières dépendent uniquement de la qualité de l'information géologique. Quatrièmement, l'hypothèse supplémentaire suivante est faite. Le temps moyen s'écoulant entre deux horizons augmente avec le nombre de forages à la marge extensive (c'est-à-dire dans des territoires non contigus au territoire existant) et avec la diminution du volume de sédiments non explorés. Cinquièmement, la taille des gisements découverts dans l'ordre des découvertes est engendrée par échantillonnage sans remise d'une population finie de nappes dont les tailles sont engendrées par un autre processus aléatoire. La population finie des gisements est elle-même un échantillon aléatoire d'une superpopulation hypothétique infinie dont la distribution par taille est de forme fonctionnelle connue. La taille de la population finie est inconnue [41] [42] [45].

En 1976, R.S. Uhler est le premier sans doute à avoir explicitement incorporé dans l'analyse économique un modèle stochastique du processus d'exploration [77]. Ce modèle satisfait aux trois propriétés généralement considérées comme essentielles pour représenter le processus d'exploration : 1) prise en considération de la croissance de l'information géologique au sens large ; 2) le caractère exhaustif (sans remise) de l'échantillonnage ; 3) l'antériorité des découvertes de grande taille.

La fonction de production proposée est basée sur une combinaison, déjà proposée par M. Allais, de processus de Poisson pour la découverte et de processus lognormal pour la taille. Elle tient grossièrement compte de l'information géologique croissante et de l'effet d'épuisement du processus d'échantillonnage par l'intermédiaire de la forme fonctionnelle du paramètre du processus de Poisson. Le paramètre est supposé être la dérivée d'une fonction sigmoïde symétrique de l'effort cumulatif d'exploration. L'antériorité des découvertes de grande taille dans le processus d'exploration est prise en compte dans la forme fonctionnelle de la moyenne du logarithme des tailles. Cette moyenne est supposée être une fonction linéaire décroissante de l'effort cumulatif d'exploration.

Une fonction de coût total espérée d'exploration est dérivée de la fonction de production. Il est ensuite prouvé, sur une base empirique solide, que le coût marginal d'exploration en Alberta est sensé augmenter rapidement.

Il ne fait aucun doute que le modèle Uhler est ingénieux. On peut toutefois critiquer la distinction de 3 étapes dans le processus de découvertes parce que le modèle lui-même ne permet pas de les identifier empiriquement. Deuxièmement, l'hypothèse (3 processus poissonniens indépendants correspondant à ces 3 étapes) est reprise sans plus de justification à M. Allais qui lui aussi n'avait pu que la baser que sur la théorie des événements rares. L'usage qui est fait des propriétés 1 et 2 pour justi-

fière une forme fonctionnelle sigmoïde peut bien entendu s'appliquer à n'importe quelle courbe de croissance [70] [72]. La symétrie de la sigmoïde ne reçoit toutefois aucune justification. Il n'y a aucune raison de croire que les propriétés 1 et 2 jouent tour à tour leur rôle de manière parfaitement symétrique à niveau d'effort d'exploration constant. L'effort d'exploration cumulatif quoique logiquement plus satisfaisant que le temps lui-même comme argument de la sigmoïde est certainement fortement corrélé avec lui. L'estimation du point d'inflexion de la sigmoïde souffre des mêmes genres de problèmes statistiques que l'estimation de l'asymptote supérieure de la logistique. Puisque l'on sait que l'exploration pour le pétrole et le gaz naturel est largement équivalente à un investissement dans la production de produits joints, il n'est pas raisonnable d'essayer d'estimer séparément le coût marginal d'exploration pour le gaz naturel et pour le pétrole. Malgré ces critiques, il est incontestable que les résultats empiriques du modèle sont fort bons. Dans l'arbitrage entre le réalisme et la simplicité qui entre dans la construction de tout modèle, il est clair que le choix de Uhler est presque optimal.

Il est donc bien clair que les propriétés essentielles d'un modèle d'exploration ont été identifiées et que le processus lognormal pour la génération des tailles des gisements est difficilement réfutable. Aucun traitement de l'information géologique n'est encore satisfaisant. En ce qui concerne la probabilité de découverte, l'évidence empirique est encore insuffisante pour privilégier un modèle plutôt qu'un autre.

SECTION 3 : SUGGESTIONS POUR UNE THÉORIE MICROÉCONOMIQUE DE L'EXPLORATION EN RÉGIME D'INCERTITUDE

La théorie microéconomique de la firme en régime d'incertitude s'est penchée uniquement sur les effets de l'incertitude de la demande pour le produit de la firme³¹. Jamais l'incertitude sur un intrant de la fonction de production n'a été considérée. En macroéconomie, il en va différemment depuis une première contribution non publiée de J. Mirrlees remontant à 1965. Toutefois, cette littérature macroéconomique n'a fait que dériver des résultats équivalents à ceux déjà obtenus dans les modèles déterministes sans pour autant permettre une véritable évaluation de l'impact de l'incertitude sur les résultats des modèles³².

Puisque la littérature économique est incapable de nous aider, il reste deux sources possibles d'investigation. La première est la théorie des

31. Voir, par exemple, E. Sheshinski et J. Dreze, « Demand Fluctuations, Capacity Utilization and Costs », *American Economic Review*, décembre 1976, vol. 66, 731-742 et la littérature citée.

32. Voir par exemple L.J. Mirman, *One sector economic growth and uncertainty: a survey*, mimeo, juin 1976 et la littérature citée.

réservoirs³³. La théorie des réservoirs examine un problème de stockage dont l'intrant est aléatoire mais contrôlable selon une fonction objective comme la maximisation du profit. Toutefois, dans l'exploration il n'y a pas d'équivalent naturel à la capacité d'un réservoir. Il serait donc préférable de considérer un problème de réservoir à capacité infinie. La deuxième source de résultats possibles est la théorie de la recherche³⁴. Il faudrait examiner spécialement la recherche systématique (les sites prospectifs ne sont pas tirés au hasard) avec possibilités de remise (les sites prospectifs peuvent être sélectionnés à nouveau après avoir été rejetés). Comme l'accumulation d'information est aussi un aspect essentiel de la recherche exploratoire, il s'agirait d'examiner la recherche adaptative³⁵. La recherche adaptative systématique avec remise semble avoir été peu étudiée.

La distribution lognormale a dans la théorie de l'exploration un statut au moins aussi respectable que le mouvement brownien géométrique dans la théorie de la spéculation tant sur le plan de la justification théorique que de la vérification empirique. Toutefois le mouvement brownien géométrique a été intégré dans la théorie économique de la spéculation³⁶. Le processus complexe d'échantillonnage à partir de la distribution lognormale qui affecte la recherche exploratoire n'est pas encore intégré dans une théorie économique de l'exploration qui, pour l'essentiel, reste à élaborer³⁷. Cette théorie devrait idéalement permettre d'intégrer sous forme d'hypothèses ou de théorèmes, les résultats, apparemment cohérents, obtenus dans des modèles partiels et différents.

33. Voir par exemple : N.U. Prabhu, *Queues and inventories*, Wiley, 1965, ch. 7 ; J.A. Bather, « A diffusion model for the control of a dam », *Journal of Applied Probability*, 1968, vol. 5, 55-71 ; P.W.A. Dayananda, « Optimal reinsurance », *Journal of Applied Probability*, 1970, vol. 7, 134-156 ; W.F. Foster, « Optimal reserves growth under a Wiener process », *Journal of Applied Probability*, 1975.

La théorie des assurances est peut-être dans une certaine mesure isomorphe à celle des barrages. Voir par exemple : K. Borch, *Problems in the Economic Theory of Insurance*, Paper delivered at the ASTIN Colloquium, Washington, 1977, et la littérature citée.

34. Voir par exemple : S.A. Lippman et J.M. McCall, « The Economics of job search : a survey », *Economic Inquiry*, vol. 14, juin 1975, 155-189 ; M.C. Kohn et S. Shavell, *The theory of search*, *Journal of Economic Theory*, vol. 9, 1974, 93-123.

35. La recherche adaptative est reliée au contrôle optimal stochastique adaptatif ou à boucle fermée. Le contrôle adaptatif ne tient pas seulement compte de l'information ; il planifie la façon dont l'information sera obtenue et optimalement exploitée. Voir par exemple : E. Tse, « Adaptive dual Control Methods », *Annals of Economic and Social Measurement*, 1974, vol. 5, 65-83.

36. Voir par exemple : E.F. Fama, « Efficient capital markets : a review of theory and empirical work », *Journal of Finance*, 1970, vol. 25, 383-417 ; M.C. Jensen, « Capital markets : theory and evidence », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1972, vol. 3, 357-398 ; R.C. Merton, « Optimum Consumption and portfolio rules in a continuous time model », *Journal of Economic Theory*, 1971, vol. 3, 373-413 ; P.A. Samuelson, « Mathematics of Speculative Prices », *SIAM Review*, 1973, vol. 15, 1-42.

37. Deux exceptions notoires sur le plan économétrique sont [26], p. 65-79 et [78].

Les résultats les plus importants peuvent se résumer succinctement sous la forme d'une dizaine de propositions.

Proposition 1 : La définition de l'exploration implique que la théorie microéconomique de l'activité d'exploration soit développée d'emblée sous forme de théorie dynamique (idéalement adaptative) en régime d'incertitude.

Proposition 2 : a) Le taux d'extraction sera à l'origine de l'horizon plus petit que celui qui serait obtenu si le stock était remplacé par son équivalent certain ; b) ce taux d'extraction sera d'autant plus petit que l'incertitude sur le stock sera grande.

Proposition 3 : Le sentier optimal d'extraction n'est pas nécessairement monotone en horizon infini contrairement au régime de certitude.

Proposition 4 : Le taux optimal d'extraction épuisera la ressource en horizon fini avec une probabilité non nulle contrairement au régime de certitude.

Proposition 5 : L'utilisation d'un taux d'escompte constant supérieur au taux certain pour tenir compte de l'incertitude sur le stock est en général dénuée de tout fondement théorique.

Proposition 6 : Il n'est jamais optimal de retarder l'exploration jusqu'à ce que le stock des réserves connues soit épuisé.

Proposition 7 : Plus l'incertitude sur le stock est grande, plus tôt il faut explorer.

Proposition 8 : Qu'il y ait ou non exploration, l'allocation concurrentielle en cas d'incertitude sur les stocks de ressources n'est pas optimale.

Proposition 9 : Le processus de découverte sans acquisition d'information est un processus d'échantillonnage hypergéométrique avec probabilité proportionnelle aux tailles des gisements dans une population finie de gisements dont la distribution des tailles est engendrée par échantillonnage dans une population infinie de gisements dont la distribution des tailles est lognormale.

Proposition 10 : L'activité d'exploration est sujette à rendements croissants à l'échelle.

Certains résultats obtenus en régime de certitude tels l'exploitation des gisements en ordre de coûts croissants et la nécessité d'accroître le stock de gisements lorsque la rente croît au taux d'intérêt se maintiennent en régime d'incertitude.

L'influence de l'incertitude de la taille du gisement sur la longueur de l'horizon, la capacité d'extraction et la coupure de la teneur doit être

étudiée davantage. L'examen soit analytique soit par simulation de modèles plus spécifiques permettrait peut-être l'obtention de résultats plus précis. Les différentes méthodes de transfert ou de diminution de l'incertitude mériteraient également un examen plus attentif.

Ph. CRABBE,
Université d'Ottawa.

BIBLIOGRAPHIE

I. Littérature économique concernant l'exploration

1. M.A. ADELMAN, *The World Petroleum Market, 1947-1969*, Johns Hopkins Press, 1971.
2. R. BROWNE, *Working Costs of the Witwatersrand*, Johannesburg, 1907.
3. W.J. BUSSCHAU, *The Theory of Gold Supply*, Oxford University Press, 1936.
4. D. CARLISLE, « The economics of a fund resource with particular reference to mining », *American Economic Review*, 1954, vol. 44, 595-616.
5. D. CARLISLE, « Non-fuel mineral resources », in *Natural Resources*, M.R. Huberty et W.L. Flock, éd., McGraw-Hill, 1958, 355-363.
6. S.V. CIRIACY-WANTRUP, *Resource Conservation, Economics and Policy*, University of California : Berkeley, 1952.
7. P. DASGUPTA et G.M. HEAL, « The optimal depletion of exhaustible resources », *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of exhaustible resources, 1974, 3-28.
8. P. DASGUPTA et J.E. STIGLITZ, *Uncertainty and the rate of extraction under alternative institutional arrangements*, Technical Report No. 179, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1976.
9. F. FISHER, *Supply and Costs in the U.S. Petroleum Industry*, Johns Hopkins Press for Resources for the Future, 1964.
10. N.D. FITZGERALD, « Optimum rate of working mineral deposits », *Mining and Metallurgy*, vol. 19, septembre 1938, 401.
11. R. GIGUET, « Exploitation optimum d'un barrage en régime connu », *Annales des Ponts et Chaussées*, mars-avril 1945.
12. R. GILBERT, *Optimal depletion of an uncertain stock*, Technical Report No. 107, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1976.
13. R. GILBERT, *Search strategies for nonrenewable resource deposits*, Technical Report No. 116, Institute for Mathematical Studies in Social Sciences, Stanford University, 1976.

14. C. HENRY, « Option values in the economics of irreplaceable assets », *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economic of exhaustible resources, 1974, 83-104.
15. O.C. HERFINDAHL, « Some fundamentals of mineral economics », *Land Economics*, 1955, vol. 31, 131-188. Reprinted in *Resource Economics*, Selected works of Orris C. Herfindahl, D.B. Brooks, éd., Johns Hopkins University Press for Resources for the Future, 1974, 35-46.
16. O.C. HERFINDAHL, *Copper costs and prices : 1870-1957*, Johns Hopkins Press for Resources for the Future, 1959.
17. O.C. HERFINDAHL, *Natural Resource Information for Economic Development*, Johns Hopkins Press for Resources for the Future, 1969, appendix to c. 2 : The question of exploration strategy, reprinted in *Resource Economics*, Selected works of Orris C. Herfindahl, D.B. Brooks, éd., Johns Hopkins University Press for Resources for the Future, 1974, 218-224.
18. O.C. HERFINDAHL et A.V. KNEESE, *Economic Theory of Natural Resources*, C.E. Merrill, 1974, 132-136.
19. J.E. HODGES et H.B. STEELE, « An investigation of the problems of cost determination for the discovery, development, and production of liquid hydrocarbon and natural gas resources », *The Rice Institute Pamphlet*, vol. 46, No. 3, octobre 1953.
20. H.C. HOOVER, *Principles of Mining*, McGraw-Hill, 1909.
21. T.J. HOOVER, *Economics of Mining*, Stanford University Press, 3^e éd., 1948.
22. M.E. KEMP, *Three topics in the theory of international trade*, North-Holland, 1976, c. 23, 297-308.
23. R.G. KULLER et R.G. CUMMINGS, « An economic model of production and investment for petroleum reservoirs », *The American Economic Review*, vol. 64, mars 1974, 66-79.
24. H. LOUIS, *Mineral Valuation*, Griffin, 1923.
25. G.C. LOURY, *The optimum exploitation of an unknown reserve*, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University, DP No. 255, novembre 1976.
26. P.W. MACAVOY et R.S. PINDYCK, *The Economics of the Natural Gas Shortage (1960-1980)*, North-Holland, 1975.
27. P. MASSE, *Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique*, Hermann, 1946, 2 vol.
28. P. MASSE, *Le choix des investissements*, Dunod, 1959, 347-363.
29. F.W. PAISH, « Causes of changes in gold supply », *Economica*, vol. 5, novembre 1938, 379-409.
30. F. PETERSON et A.C. FISHER, *L'économie des ressources naturelles*.
31. L.E. PRESTON, *Exploration for non-ferrous metals*, Resources for the Future, 1960.
32. J. STIGLITZ, « Growth with exhaustible natural resources : the competitive economy », *Review of Economic Studies*, Symposium on the Economics of exhaustible resources, 1974, 139-152.

II. *Modèles stochastiques d'exploration*

33. L.H. AHRENS, « A fundamental law of geochemistry », *Nature*, 1953, vol. 172, No. 4390, 1148.
34. L.H. AHRENS, « The lognormal distribution of the elements (a fundamental law of geochemistry and its subsidiary) », *Geochimica and Cosmochimica Acta*, 1954, vol. 5, 49-74.
35. L.H. AHRENS, « The lognormal distribution of elements (2) », *Geochimica and Cosmochimica Acta*, 1954, vol. 6, 121-132.
36. L.H. AHRENS, « Lognormal — type distribution III », *Geochimica and Cosmochimica Acta*, 1957, vol. 11, 205-213.
37. J.C. ATTCHISON et J.A.C. BROWN, *The lognormal distribution*, Cambridge University Press, 1967.
38. M. ALLAIS, « Method of appraising economic prospects of mining exploration over large territories — Algerian Sahara case study », *Management Science*, 1957, vol. 3, 285-347. Traduction d'un article publié en janvier 1956 dans la *Revue de l'Industrie Minérale*.
39. J.J. ARPS et T.G. ROBERTS, « Economics of drilling for cretaceous oil on east flank of Denver — Julesburg basin », *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, 1958, vol. 42, 2549-2566.
40. J.R. ARRINGTON, « Predicting the size of crude reserves is key to evaluating exploration programs and here's a practical way to evaluate reserves », *Oil and Gas Journal*, 1960, vol. 158, 130-132.
41. E. BAROUCH et G. KAUFMAN, *Probabilistic modelling of oil and gas discovery*, miméo non daté.
42. E. BAROUCH et G. KAUFMAN, *Oil and gas discovery modelled as sampling proportional to random size*, Sloan School of Management, MIT, WP. 888-76.
43. P.G. BRADLEY, « Exploration models and petroleum production economics », in M.A. Adelman, éd., *Alaskan Oil : Costs and Supply*, Praeger, 1971, 95-122.
44. P.G. BRADLEY et G.M. KAUFMAN, « Reward and uncertainty in exploration programs », *Arctic Geology*, Memoir No. 19, The American Association of Petroleum Geologists, 1973, 638-644.
45. D. COX, « Some sampling in technology », in N.L. Johnson et H.D. Smith, éd., *New developments in survey sampling*, Wiley, 1969, 506-527.
46. P.J. CRABBE, *The stochastic production of oil and gas exploration in mature regions*, Communication présentée au Congrès de la Société Canadienne de Recherche Opérationnelle tenu à Montréal en juin 1969.
47. L.J. DREW, « Spatial distribution of the probability of occurrence and the value of petroleum : Kansas ; an example », *Journal of the International Institute for Mathematical Geology*, 1972, vol. 4, 155-171.
48. J.H. ENGEL, « Use of clustering in mineralogical and other surveys », *Proceedings of first international conference on Operations Research*, Operations Research Society of America, 1957, 176-192.

49. B. EPSTEIN, « The mathematical description of certain breakage mechanisms leading to the logarithmico-normal distribution », *Journal of the Franklin Institute*, 1947, vol. 244, 471-477.
50. B. EPSTEIN, « Logarithmico-normal distribution in breakage of solids », *Industrial and Engineering Chemistry*, 1948, vol. 40, 2289-2291.
51. G. GRAYSON, *Decisions under uncertainty, drilling decisions by oil and gas operators*, Harvard University, Graduate School of Business Administration, 1960.
52. J.C. GRIFFITHS, « Exploration for natural resources », *Operations Research*, 1966, 189-209.
53. J. HAYWARD, « Probabilities and wildcats tested through mathematical manipulations », *Oil and Gas Journal*, 15 novembre 1934, 129.
54. G.M. KAUFMAN, *Statistical decision and related techniques in oil and gas exploration*, Prentice-Hall, 1963.
55. G.M. KAUFMAN, « Statistical analysis of the size distribution of oil and gas fields », *Symposium on Petroleum Economics and Evaluation*, American Institute of Mining Engineering, 1965, 109-124.
56. G.M. KAUFMAN, Y. BALCER et D. KRUYT, « A probabilistic model of oil and gas discovery, Studies in Geology », No. 1, *Methods of estimating the volume of undiscovered oil and gas resources*, The American Association of Petroleum Geologists, 1975, 113-142.
57. G.M. KAUFMAN et P.G. BRADLEY, « Two stochastic models useful in petroleum exploration », *Arctic Geology*, American Association of Petroleum Geologists, Mémoire n° 19, 1973, 633-637.
58. A.V. KOLMOGOROV, « Uber das logarithmisch normale verteilungesetz der dimensionen der teilchen bei zustückelung », *Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1941, vol. 31, n° 2, 99-101.
59. T. KOULOMZINE et R.W. DAGENAI, « Statistical determination of the chances of success in mineral exploration in Canada », *Canadian Mining Journal*, 1959, vol. 80, 107-110.
60. D.G. KRIGE, « A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand », *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 1951, vol. 52, 119-139.
61. F.H. LAHEE, « How many fields really pay off ? », *Oil and Gas Journal*, 17 septembre 1956, 369.
62. F.H. LAHEE, « Degrees of success in wildcat drilling », *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, 1956, vol. 40, 1978-1981.
63. A.W. MCCRAY, *Petroleum evaluations and economic decisions*, Prentice-Hall, 1975.
64. R.G. MCCROSSAN, « An analysis of size frequency distribution of oil and gas reserves of Western Canada », *Canadian Journal of Earth Science*, 1969, vol. 6, 201-211.
65. G. MATHERON, « Application des méthodes statistiques à l'évaluation des gisements », *Annales des Mines*, décembre 1955, 50-75.

66. G. MATHERON et P. FORMERY, « Recherche d'optimum dans la reconnaissance et la mise en exploitation des gisements miniers », *Annales des Mines*, avril 1963, 23-42, mai 1963, 11-30.
67. S. PIRSON, « Probability theory applied to oil exploration ventures », *The Petroleum Engineer*, 4 parties, février, mars, avril, mai 1971.
68. Y.V. PROKHOROV, « On the lognormal distribution in geochemical problems », *Theory of Probability and its Applications*, 1965, vol. 10, 169-173.
69. N.K. RAZUMOVSKY, « Distribution of metal values in ore deposits », *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1940, vol. 38, n° 9, 814-816.
70. J.T. RYAN, « An analysis of the crude oil discovery rate in Alberta », *Bulletin of Canadian Petroleum Geology*, 1973, vol. 21, 219-235.
71. J.T. RYAN, « An estimate of the conventional crude oil potential in Alberta », *Bulletin of Canadian Petroleum Geology*, 1973, vol. 21, 236-246.
72. J.M. RYAN, « National Academy of sciences report on energy resources : discussion of limitations of logistic projections », *Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists*, 1965, vol. 49, 1713-1727.
73. W.E. SHARP, « A lognormal distribution of alluvial diamonds with an economic cutoff », *Economic Geology*, 1976, vol. 71, 648-655.
74. D.W. SHAW, « Element distribution laws in geochemistry », *Geochimica and Cosmochimica Acta*, 1961, vol. 23, 116-134.
75. J.Y. THEBAULT, « Distribution lognormale de certains caractères de quelques phénomènes géologiques et ses applications », *Revue de Statistique Appliquée*, 1961, vol. 9, 37-87.
76. T.R. THIAGARAJAN, *The use of lognormal distribution approach for undiscovered recoverable oil and gas resources in the United States*, Communication présentée au TIMS/ORSA Joint Meeting, Philadelphie, avril 1976.
77. R.S. UHLER et P.G. BRADLEY, « A stochastic model for determining the economic prospects of petroleum exploration over large regions », *Journal of the American Statistical Association*, 1970, vol. 65, 623-632.
78. R.S. UHLER, « Costs and supply in petroleum exploration : the case of Alberta », *The Canadian Journal of Economics*, 1976, vol. 9, 72-90.
79. A.B. VISTELIUS, « The skew frequency distribution and the fundamental law of the geochemical processes », *Journal of Geology*, 1960, vol. 68, 1-23.
80. W.A. WHITWORTH, *Choice and Chance*, 5^e éd., 1901, réimprimé, Hafner Publishing Co., 1959.