Document generated on 05/19/2024 5:21 p.m.

L'Actualité économique

Les indices classiques : quelques problèmes particuliers

Yves Rabeau

Volume 41, Number 4, January–March 1966

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1003127ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1003127ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Rabeau, Y. (1966). Les indices classiques : quelques problèmes particuliers. *L'Actualité économique*, *41*(4), 636–658. https://doi.org/10.7202/1003127ar

Tous droits réservés © HEC Montréal, 1966

This document is protected by copyright law. Use of the services of Érudit (including reproduction) is subject to its terms and conditions, which can be viewed online.

https://apropos.erudit.org/en/users/policy-on-use/

This article is disseminated and preserved by Érudit.

Érudit is a non-profit inter-university consortium of the Université de Montréal, Université Laval, and the Université du Québec à Montréal. Its mission is to promote and disseminate research.

https://www.erudit.org/en/

Les indices classiques : quelques problèmes particuliers

Il ne saurait être question, dans cet article, de reprendre la formulation des diverses théories portant sur les indices ; nous avons plutôt l'intention de développer quelques points particuliers de la doctrine classique, de façon à apporter certaines précisions aux théorèmes fondamentaux et à mettre en lumière les divers raffinements qui servent à étayer la théorie générale. Et de plus, cet article se présente comme une synthèse de plusieurs autres articles de revues (dont on retrouvera le nom des auteurs dans le texte) et, à ce titre, n'apporte pas de développements entièrement nouveaux.

Ceux qui, d'autre part, ne seraient pas familiers avec le problème des indices ou qui désireraient simplement revoir les notions fondamentales peuvent se reporter à l'article de M. Claude Tricot, paru dans la livraison d'avril-juin 1964 de *L'Actualité Économique*.

Nous nous proposons, ici, d'aborder les trois points suivants :

— les limites de l'indice fonctionnel ;

— l'évaluation de la différence entre les indices de Paasche et de Laspeyres ;

— l'assimilation d'un indice fonctionnel à un autre de type monétaire.

*

*   *

À cause de la facilité d'adaptation ou de réallocation des ressources dont jouit le consommateur, en raison également des augmentations de la productivité qui surgissent au cours du temps, l'hypothèse essentielle sur laquelle repose la notion de l'indice fonctionnel doit être modifiée de façon telle que :

$$(1) \qquad U_0 = U(\mathcal{Q}_0) \neq U_1 = U(\mathcal{Q}_1)$$

U_t représentant la fonction d'utilité de l'époque t et $\mathcal{Q}_t$ le complexe de biens $(q_1^t, q_2^t, ..., q_n^t)$ correspondant à cette fonction.

À une époque O, le consommateur utilise son revenu de façon à rendre maximale la satisfaction de ses besoins. À une époque ultérieure (disons l'époque 1), à la suite de nouvelles expériences ou de nouvelles connaissances (par exemple, meilleurs renseignements concernant les biens offerts sur le marché...), le consommateur peut, avec le même budget, améliorer son niveau de satisfaction de manière à ce que $U_1 > U_0$. Dès lors, se pose le problème suivant : quel revenu aurait-il fallu gagner à la situation zéro pour que les niveaux de satisfaction soient les mêmes, c'est-à-dire $U_0' = U_1$; ou encore, quel revenu faudrait-il recevoir à la situation un pour que le niveau de satisfaction de la situation zéro soit le même que celui de la situation un, soit, cette fois-ci, $U_1' = U_0$. Ceci va nous conduire à établir les limites de l'indice fonctionnel.

Considérons le revenu r_1' défini ainsi :

$$(2) \qquad r_1' = p_1^1 q_1^0 + p_2^1 q_2^0 + ... + p_n^1 q_n^0$$

où, p_n^t représente le prix du bien de rang n à l'époque t et q_n^t indique le bien de rang n à l'époque t.

Ce revenu r_1' permet au consommateur à la situation un d'obtenir *un niveau d'existence au moins égal* (aux prix de la situation un) à celui de la situation zéro puisque ce budget rend possible l'acquisition du complexe $\mathcal{Q}_0$. Par conséquent, grâce à r_1', on atteint un niveau d'existence $U_1' = U_0$; si on modifie convenablement les quantités du budget, il viendra alors que $U_1' > U_0$ ce qui concorde bien avec l'hypothèse qu'à chaque budget correspond l'utilité maximale (situation correspondant toujours au budget r_1'). C'est dire qu'avec un système nouveau de prix, nous pouvons nous procurer au moins les mêmes quantités et qu'en effectuant des changements raisonnables dans les quantités achetées (substitutions entre les divers biens), on obtient un niveau de satisfaction supérieur à celui du début. Et de là, nous déduisons que le revenu r_1 qui permettait *de conserver exactement le même niveau d'existence U_0 est inférieur* au revenu r'_1 qui, lui, rend possible la conservation du complexe $\mathfrak{Q}_0$, et l'obtention d'un autre complexe tel que $U'_1 > U_0$.

Si $r_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1$ (achat de nouvelles quantités aux nouveaux prix permettant de maintenir l'égalité $U_0 = U_1$), il vient alors :

$$r_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1 < r'_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^0 \tag{3}$$

En divisant chaque membre par $\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0$, on obtient :

$$I_0 = \frac{r_1}{r_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0} < \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^0}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0} = L_0 \tag{4}$$

où I_0 désigne l'indice fonctionnel et L_0 représente l'indice Laspeyres ayant comme base les quantités et les prix de l'époque zéro.

Cette relation fixe la borne supérieure de l'indice fonctionnel. Cette inégalité est extrêmement révélatrice ; que signifie-t-elle ? « L'indice des prix de la situation un, rapporté à la situation zéro et calculé sur la base du niveau d'existence de cette même situation zéro est inférieur à l'indice budgétaire calculé en prenant comme coefficient de pondération les quantités consommées au cours de la période zéro... » [1]

En s'intéressant au revenu r_1, l'inégalité (4) se référait au niveau d'existence U_0 ; en revanche, l'indice des prix qui tient compte du niveau d'existence de la situation un (en maintenant cette fois-ci l'égalité $U'_0 = U_1$) par le truchement d'un raisonnement analogue, s'écrit :

$$I_1 = \frac{r_1}{r_0} > \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^1} = P_1 \tag{5}$$

où I_1 est l'indice fonctionnel qui prend en considération le niveau U_1, et P_1 représente l'indice Paasche ayant comme base les quantités de l'époque un et les prix de l'époque initiale.

1. René Roy, *Journal de la Société statistique de Paris*, septembre 1941, p. 195.

Ce résultat détermine la borne inférieure de l'indice. Ces conclusions offrent un intérêt pratique remarquable. En effet, à condition que les niveaux d'existence U_0 et U_1 soient sensiblement équivalents pour que les indices I_0 et I_1 puissent être regardés comme à peu près égaux (l'un utilisant le niveau U_0 rapporté à la situation un et l'autre le niveau U_1 rapporté à la situation zéro), on peut conclure alors que l'indice basé sur la notion d'équivalence a une valeur sensiblement égale à chacune de ses limites L_0 et P_1. En d'autres termes, si $I_0 \simeq I_1$, on obtient en désignant par I l'indice fonctionnel qui remplace I_0 et I_1,

(6) $$P_1 < I < L_0.$$

L'indice fonctionnel pose de graves difficultés dans l'élaboration de son calcul pratique à cause de sa référence à un consommateur (à un individu) mais, en revanche, il traduit fort bien la réalité de sorte que si la valeur de L et celle de P ne diffèrent pas trop, ces indices seront en mesure de donner une idée approximative de l'indice vrai, basé sur la notion d'équivalence, d'autant mieux que ces indices ne présentent pas, en pratique, les difficultés de calcul de l'indice fonctionnel. Par exemple, on pourra choisir la moyenne arithmétique de L et de P pour s'approcher davantage d'un résultat qui exprime le mieux possible la situation réelle.

Relevons cependant une difficulté que soulève l'estimation de l'indice vrai. Pour que L et P soient de bons estimateurs de I, on suppose que les niveaux d'existence U_0 et U_1 sont sensiblement les mêmes, de manière à confondre I_0 et I_1. Or, c'est précisément cette équivalence des niveaux d'existence qu'il est fort difficile de jauger. Si les niveaux de satisfaction diffèrent notablement, les valeurs de L et de P s'éloigneront et localiser la vraie valeur de l'indice dans cet intervalle suscitera les inconvénients propres à l'estimation statistique.

*

* *

Pour s'assurer que la comparaison effectuée entre la situation actuelle et celle de base est encore sensée, c'est-à-dire que les époques comparées ne sont pas par trop différentes, l'utilisation d'un indice du type Paasche ou Laspeyres amène le calculateur à confronter les résultats que livrent les deux formules L et P. Si la différence $D = L - P$ n'excède pas la valeur 2, on conclut que le calcul à l'aide de L ou de P reste valide. Au-delà de 2, les quantités initiales diffèrent suffisamment des quantités de l'époque actuelle pour que la comparaison ne soit plus représentative ; les deux formules L et P ne donnent pas de résultat raisonnable. Ceci signifie que les changements technologiques, l'évolution des préférences des consommateurs ont amené de profondes transformations dans les habitudes d'achat ; par conséquent, si l'on veut dès lors comparer des données semblables pour dégager les variations du niveau des prix, il faudra modifier les variables de l'époque de référence, c'est-à-dire changer la base de l'indice. En revanche, une faible différence entre L et P laisse supposer que l'erreur commise en utilisant l'une ou l'autre des formules n'affecte pas le calcul au point de le dépouiller de tout sens ; ce qui indique simplement que les habitudes d'achat entre les époques considérées n'ont pas subi ces métamorphoses trop substantielles qui rendraient le calcul inutile.

Ce qui précède constitue simplement un bref rappel des conclusions de la théorie classique des indices ; nous avons repris ces quelques principes uniquement pour indiquer l'intérêt que peut soulever le calcul de la différence existant entre les indices Paasche et Laspeyres. C'est à cette différence que nous allons maintenant nous intéresser.

Il s'agit donc de donner une signification rigoureuse à l'expression :

$$D = L - P \tag{7}$$

Sur les indices L et P, nous pouvons effectuer les transformations suivantes :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^t p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0 \cdot \frac{q_i^t}{q_i^0} \cdot \frac{p_i^t}{p_i^0}}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0 \cdot \frac{q_i^t}{q_i^0}} \tag{8}$$

Soient alors :

$m_i = p_i^0 q_i^0$, la valeur du bien de rang i à l'instant initial,

$X_i = \frac{p_i^t}{p_i^0}$, rapport du prix du bien i aux deux époques 0 et t,

$Y_i = \frac{q_i^t}{q_i^0}$, rapport identique au précédent, mais portant sur les quantités.

D'après ce que l'on vient de poser, la relation (8) devient :

$$P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} \tag{9}$$

De même pour l'indice de Laspeyres, on aura :

$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^t}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0 \cdot \frac{p_i^t}{p_i^0}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{10}$$

L_p et P_p désignent les indices ayant trait au prix tandis que L_q et P_q représentent des indices de quantité qui s'écrivent en fait :

$$L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{11}$$

$$P_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i} \tag{12}$$

Et l'on remarque que L_p et L_q sont respectivement les moyennes pondérées des X_i et des Y_i, résultat qui nous sera fort utile dans la suite.

D'autre part, I. Fisher avait avancé dans son célèbre ouvrage sur les indices [2] que « l'indice Paasche est plus grand ou plus petit que l'indice Laspeyres, selon que le rapport des prix est en corréla-

2. Voir I. Fisher, *The Making of Index Number*, Houghton Mifflin Co., New York 1922, p. 410 ss.

tion positive ou négative avec le rapport des quantités » ; et de plus, il affirmait « qu'un coefficient de corrélation élevé signifie presque toujours une différence assez grande entre les deux indices » [3].

Nous n'allons pas discuter cette opinion. Si elle a l'avantage de mettre en lumière la notion de corrélation qui peut exister entre les prix et les quantités, il faut dire, toutefois, que plusieurs statisticiens n'ont pas admis ce théorème ; notamment, M. Bortkiewicz [4] affirme « que le signe et la grandeur de la différence existant entre L et P peut être donnée de façon exacte à l'aide d'une expression qui fait appel au coefficient de corrélation pondéré ; de plus, précise-t-il, le signe de ce coefficient est toujours celui de la différence et si les indices ont même valeur, le coefficient est nul ».

Cette explication qui a trait au coefficient de corrélation pondéré va nous permettre de pousser plus avant notre calcul. En effet, nous avons :

$$D = P_p - L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{13}$$

En mettant $\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i$ en facteur, nous obtenons:

$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) \tag{14}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i X_i = L_p \sum_{i=1}^{n} m_i ; \quad \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i = L_q \sum_{i=1}^{n} m_i \tag{15}$$

De là, on tire :

$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i X_i - L_p L_q \sum_{i=1}^{n} m_i\right) \tag{16}$$

3. Traduit par l'auteur de l'article.

4. Voir I. Siegel, *Journal of the American Statistical Society*, vol. 36, septembre 1941, p. 344 ss.

Si on ajoute et on retranche $L_p\, L_q \sum_{i=1}^{n} m_i$, il vient alors :

(17)

$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i - L_p\, L_q \sum_{i=1}^{n} m_i + L_p\, L_q \sum_{i=1}^{n} m_i - L_p\, L_q \sum_{i=1}^{n} m_i \right)$$

En faisant intervenir les relations (15) :

(18)

$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i - L_p \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i - L_q \sum_{i=1}^{n} m_i X_i + L_p L_q \sum_{i=1}^{n} m_i \right)$$

En regroupant, on trouve finalement :

(19) $$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[m_i (X_i - L_p)\ (Y_i - L_q) \right] \right\}$$

Ce qui a pour effet de faire apparaître la covariance des $X_i\, Y_i$; d'autre part, on sait que :

(20) $$r_{m/xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\ \sigma_{m/x}\, \sigma_{m/y}}$$

où dans cette expression du coefficient de corrélation, on a :

$$x_i = X_i - L_p\,;\ y_i = Y_i - L_q\,;$$

$$\sigma_{m/x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\ ;\ \sigma_{m/y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

On peut donc écrire :

(21) $$r_{m/xy} \,.\, \sigma_{m/x} \,.\, \sigma_{m/y} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Or, $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$ est évidemment identique à l'expression qui apparaît entre les accolades de la relation (19) ; il vient alors :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i} (r_{m/xy} \cdot \sigma_{m/x} \cdot \sigma_{m/y}) \tag{22}$$

C'est-à-dire :

$$D = \frac{1}{L_q} (r_{m/xy} \cdot \sigma_{m/x} \cdot \sigma_{m/y}) \tag{23}$$

Voilà donc l'expression finale de la différence $L - P$, soit le produit du coefficient de corrélation pondéré (faisant appel aux variables X et Y) par l'écart-type pondéré des X_i, par l'écart-type pondéré des Y_i et par l'inverse de l'indice de quantum L. Comme l'écart-type est toujours positif, il s'ensuit que le signe de la différence est toujours celui du coefficient de corrélation pondéré ; si la différence tend vers zéro, il en va de même pour le coefficient de corrélation. Ceci vient donc compléter l'explication de Fisher et nous permet de relier par le détour des rapports de prix et de quantités, la différence entre les indices de Paasche et Laspeyres à un coefficient de corrélation, et par conséquent, de donner à cette différence une signification très rigoureuse : elle dépend de la corrélation pondérée qui existe entre les rapports de prix et de quantités.

*
* *

L'hypothèse classique selon laquelle le consommateur face à un complexe de biens vise à maximiser sa satisfaction, nous amène à rendre maximale la fonction d'utilité :

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = U(Q) \tag{24}$$

sujette à la contrainte budgétaire,

$$r = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \tag{25}$$

Rappelons également que l'on se place dans l'optique d'un consommateur et qu'ainsi, on suppose fixe le système de prix des divers biens sur le marché. On a donc :

$$F = U(q_1, q_2, ..., q_n) - \lambda\left(r - \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i\right) \tag{26}$$

à maximiser en utilisant le multiplicateur de Lagrange. Les prix étant fixes, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial q_1} &= \frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda\, p_1 = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial q_2} &= \frac{\partial U}{\partial q_2} - \lambda\, p_2 = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial q_n} &= \frac{\partial U}{\partial q_n} - \lambda\, p_n = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

Soit en définitive :

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} \dots = \frac{u_n}{p_n} = \lambda \tag{28}$$

en désignant $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ par u_i ; λ est un paramètre dont on va préciser le sens. Ces $n - 1$ équations jointes à l'équation budgétaire permettent au consommateur de déterminer les n quantités qui rendent maximale son utilité [5].

5. On suppose évidemment que les conditions du second ordre sont satisfaites, soit que les déterminants de Hessian ont leur signe qui alterne.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & -p^1 \\ \frac{\partial U^2}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & -p^2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3} & -p^1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3} & -p^2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} & -p^3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_n} & -p^1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_n} & -p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2} & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & \dots & -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Ce théorème fondamental étant rappelé, il nous faut de plus reprendre certaines autres équations de base avant d'entreprendre le calcul de l'assimilation d'un indice fonctionnel à un indice de type monétaire. En effet, la fonction d'utilité se met également sous la forme :

$$U = \Phi\ (\bar{P}, r) \tag{29}$$

où $\bar{P}$ est le vecteur prix et r, le revenu. Et si l'on considère une situation hypothétique où les prix d'une époque à l'autre auraient subi une variation proportionnelle z et que l'on rattache cette situation à celle que l'on obtient véritablement à l'époque 1 en posant que l'indice fonctionnel hypothétique satisfait à la condition $\Phi\ (\bar{P}, r) = \Phi\ (z\ \bar{P}_0, r)$, cet indice z sera alors :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i\, p_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i^1\, p_i^0} \tag{30}$$

Ces choses étant dites, abordons maintenant le problème de l'assimilation d'un indice fonctionnel à un indice monétaire. Pour ce faire, nous devrons d'abord préciser la signification du paramètre λ ; nous établirons ensuite une relation qui déterminera la demande d'un bien de rang j lorsque son prix varie ; nous nous intéresserons de plus aux élasticités de l'indice fonctionnel par rapport au revenu et aux prix. Enfin, quelques considérations sur le degré final d'utilité du revenu monétaire nous permettront d'établir les conditions nécessaires à l'assimilation des deux types d'indice.

Chacun des q_i qui maximise la fonction d'utilité dépend des p_i et de r ; on écrit donc,

$$q_i = q_i\ (p_1, p_2, \ldots\ p_n, r) \tag{31}$$

Et par conséquent, l'équation (24) devient :

$$U = U\ [q_1\ (p_1, p_2, \ldots, p_n, r), q_2\ (p_1, p_2, \ldots, p_n, r), \ldots, q_n\ (p_1, p_2, \ldots, p_n, r)] \tag{32}$$

Cette fonction de fonction se met sous la forme :

$$U = \Phi\ (p_1, p_2, \ldots, p_n, r) \tag{33}$$

Si les prix pour un consommateur sont constants, une variation du revenu affecte ainsi chacune des quantités :

(34) $$d_{q_i} = \frac{\partial q_i}{\partial r} dr$$

Et pour U, on a :

(35) $$dU = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial q_i}{\partial r} dr$$

ou encore, en se servant de l'équation (33),

(35a) $$dU = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr$$

Nous désignons l'expression (35a) par $\varphi_r\, dr$, φ_r étant la dérivée partielle de Φ par rapport à r et $\varphi_r\, dr$ étant la différentielle totale de U. Des équations (35) et (35a), on déduit que :

(36) $$\varphi r = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial q_i}{\partial r}$$

Or, on sait que $u_i = \lambda p_i$, par conséquent,

(37) $$\varphi r = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial r}$$

Si $r = \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i$, en différenciant par rapport à q, les prix restant constants, on trouve :

(38) $$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial r} = 1$$

Et donc,

(39) $$\varphi_r = \lambda$$

ce qui est l'expression du degré final d'utilité du revenu en monnaie ; ce degré final indique l'influence qu'a le revenu sur le niveau d'existence [6].

6. Strictement parlant, φr constitue le *degré final d'utilité* et non l'utilité marginale du revenu en monnaie qui serait plutôt $\varphi r dr$, soit une différentielle. Toutefois, on identifie souvent la notion du degré final d'utilité de Jevons à celle de l'utilité marginale, ce qui signifie que l'on pose $dr = 1$.

Établissons maintenant une autre relation fondamentale. Si r reste désormais constant et si le prix du jo produit varie seul, nous obtenons :

$$dU = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} dp_j \tag{40}$$

C'est-à-dire,

$$dU = \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} dp_j \tag{40a}$$

et φ_j désignera dès lors la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}$

L'équation budgétaire dans cette perspective d'une variation du prix du jo produit devient :

$$r = \sum_{j \neq i=1}^{n} p_i q_i + p_j q_j \tag{41}$$

En dérivant, chaque q_i étant fonction de p_j et le revenu demeurant constant, on obtient :

$$\sum_{j \neq i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} + q_j + p_j \frac{\partial q_j}{\partial p_j} = 0 \tag{42}$$

En regroupant :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = - q_j \tag{43}$$

Et de là, l'expression finale de q_j :

$$u_i = \lambda p_i = \varphi r\, p_i \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \varphi r \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \varphi_j \tag{44a}$$

$$\frac{\varphi j}{\varphi r} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = - q_j \tag{44b}$$

$$q_j = - \frac{\varphi_j}{\lambda} \tag{44c}$$

D'autre part, l'élasticité de l'indice z par rapport au revenu se définit selon la formule classique :

(45) $$\frac{E(z)}{E(r)} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{r}{z}$$

ce qui est évidemment une élasticité partielle puisque z dépend aussi de $\bar{P}$. Soit alors λ, l'utilité marginale du revenu pour la situation $(\bar{P}, r)$ et λ' pour la situation $(z\,\bar{P}_0, r)$, c'est-à-dire :

(46) $$\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(p_1, p_2, \ldots, p_n, r)$$

(46a) $$\lambda' = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\left(zp_1^0, zp_2^0, \ldots, zp_n^0, r\right)$$

et de là, si on suppose égaux les niveaux d'existence de façon à ce que $\Phi\ (\bar{P}, r) = \Phi\ (z\bar{P}_0, r)$, une variation de prix ayant surgi entre les deux époques, nous œuvrons sur les équations (46) et (46a) et en égalisant les dérivées partielles, il vient :

(47) $$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, r\right) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_1^0} \cdot p_1^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^0} \cdot p_2^0 \frac{\partial z}{\partial r} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial p_n^0} \cdot p_n^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial r}\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

C'est-à-dire :

(48)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, r\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left[zp_1^0, zp_2^0, \ldots, zp_n^0, r\right] p_i^0 \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\left[zp_1^0, zp_2^0, \ldots, zp_n^0, r\right]$$

Si on utilise nos notations, on écrit :

(49) $$\varphi r\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, r\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(zp_1^0, zp_2^0, \ldots, zp_n^0, r\right) p_i^0 \frac{\partial z}{\partial r} + \varphi r\left(zp_1^0, zp_2^0, \ldots, zp_n^0, r\right)$$

Et enfin,

$$\lambda = \lambda' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(z p_1^0, z p_2^0, \ldots, z p_n^0, r \right) p_i^0 \; \frac{\partial z}{\partial r} \tag{50}$$

On se rappelle, d'autre part, que $q_i \; \varphi_r = \varphi_i$ et $\lambda = \varphi_r$, ce qui nous permet d'écrire par q_i' l'ensemble des quantités correspondant à la situation $(z\overline{P}_0, r)$:

$$\varphi_i \left(z p_1^0, z p_2^0, \ldots, z p_n^0, r \right) = q_i' \lambda' \tag{51}$$

En reportant ce résultat dans l'équation (50) :

$$\lambda = \lambda' \sum_{i=1}^{n} q_i' \, p_i^0 \, \frac{\partial z}{\partial r} + \lambda' \tag{52}$$

D'après la relation (30), on a $\sum_{i=1}^{n} q_i' \, p_i^0 = \frac{r}{z}$, et par conséquent, l'expression (52) devient finalement :

$$\frac{\partial z}{\partial r} \frac{r}{z} = \frac{E(z)}{E(r)} = \frac{\lambda}{\lambda'} - 1 \tag{53}$$

Poussons un peu plus notre raisonnement en établissant une dernière relation fondamentale qui nous servira à identifier un indice monétaire à un indice fonctionnel. Partons de l'expression illustrant un changement dans les prix :

(54)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, r \right) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_1^0} p_1^0 + \frac{\partial \Phi}{\partial p_2^0} p_2^0 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial p_n^0} p_n^0 \right] \frac{\partial z}{\partial p_i}$$

Ou, plus simplement,

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^0 \, p_j^0 \, \frac{\partial z}{\partial p_i} \tag{55}$$

Or, on sait que :

$$\varphi_i = \lambda q_i \text{ et } \varphi_j^0 = \lambda' \, q_j'$$

où a) q_i est l'ensemble des biens adaptés à la situation où le degré final d'utilité du revenu est λ et où également le degré final d'influence du prix est φ_i ;

b) q'_i est cette fois-ci l'ensemble des biens correspondant à la situation où λ' représente le degré final d'utilité du revenu et φ^0_j l'influence finale du prix zp^0_j.

Par conséquent, l'équation (55) devient :

(56) $$\lambda\, q_i = \lambda' \sum_{j=1}^{n} q'_j\, p^0_j \frac{\partial z}{\partial p_i}$$

En affectant le second membre du terme z, on a :

(57) $$\lambda q_i = \frac{\lambda'}{z} \sum_{j=1}^{n} z p^0_j\, q'_j \frac{\partial z}{\partial p_i}$$

La relation $r = \sum_{j=1}^{n} z p^0_j\, q'_j$ nous permet d'écrire :

(58) $$\frac{\partial z}{\partial p_i} = \frac{\lambda\, q_i\, z}{\lambda'\, r}$$

Et donc l'élasticité partielle au prix de z est de la forme :

(59) $$\frac{E(z)}{E(p_i)} = \frac{\lambda\, q_i\, p_i}{\lambda' r}$$

L'élasticité de l'indice fonctionnel par rapport aux prix et au revenu découle des relations précédentes ; z étant fonction de p et r, on a :

(60) $$\frac{dz}{z} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{dr}{z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial p_i} \frac{dp_i}{z}$$

(61) $$\frac{dz}{z} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{dr}{r} \frac{r}{z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{z} \cdot \frac{dp_i}{p_i}$$

(62) $$= \frac{E(z)}{E(r)} \cdot \frac{dr}{r} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E(z)}{E(pi)} \frac{dp_i}{p_i}$$

(63) $$= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right) \frac{dr}{r} + \frac{\lambda'}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i p_i}{\sum_{j=1}^{n} p^0_j\, q'_j\, z} \frac{dp_i}{p_i}$$

Et enfin,

$$\frac{dz}{z} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)\frac{dr}{r} + \frac{\lambda}{\lambda'}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{dp_i}{p_i}\right) \tag{64}$$

avec $\alpha_i = \dfrac{q_i p_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^0 q_j' z}$, coefficient qui apparaît en fait dans la définition de l'indice monétaire.

Dans la mesure où l'on considère deux époques assez rapprochées et où l'on peut admettre que λ et λ' sont à peu près égaux, l'indice z fondé sur la notion d'équivalence s'assimile d'après l'équation (64) à un indice de type monétaire, c'est-à-dire :

$$\frac{dz}{z} = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{dp_i}{p_i}\right) \tag{65}$$

Par ailleurs, si on exprime le niveau d'existence comme une fonction du revenu réel au lieu du revenu monétaire, on retrouve les égalités :

$$U = \Phi(\overline{P}, r) = \Phi(z\,\overline{P}_0, r) = H(\rho) \tag{66}$$

où ρ représente le revenu réel $\frac{r}{z}$ du consommateur, soit le revenu monétaire divisé par l'indice des prix. L'utilité marginale du revenu réel, en désignant par h le degré final d'utilité, s'écrit :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \rho} d\rho = h\, d\rho \tag{67}$$

Si l'écart $\left(\frac{\lambda}{\lambda'} - 1\right)$ s'appelle e, on a évidemment $\lambda = (1 + e)\,\lambda'$ et, par conséquent,

$$\lambda = (1 + e)\frac{h}{z} \tag{68}$$

L'expression (64) devient alors :

$$\frac{dz}{z} = (1 + e)\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{dp_i}{p_i}\right) - e\frac{dr}{r} \tag{69}$$

Et d'après ce que nous avons souligné précédemment, à savoir que si λ est presque égal à λ' entre deux époques rapprochées, les relations (68) et (69) fournissent respectivement les estimateurs convenables de λ et l'indice z, soient :

(70) $$\lambda = \frac{h}{z} \text{ et } \frac{dz}{z} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{dp_i}{p_i}$$

à condition évidemment que $e \rightarrow 0$.

Ceci montre la relation qui existe entre les indices fonctionnels et monétaires ; toutefois, au-delà de cela, il convient pour terminer de préciser davantage les conditions nécessaires à l'assimilation de ces indices.

Nous avons dit que l'utilité finale du revenu λ devait être pratiquement égale à λ' si l'on désirait assimiler les indices monétaires et fonctionnels. Ceci signifie que pour des complexes de biens appartenant à une même surface d'indifférence, l'utilité finale du revenu n'a pas changé. Quelles conditions devons-nous alors exiger pour conserver l'invariance de λ ? Si l'on part de l'expression fondamentale $\lambda = \frac{u_i}{p_i}$, on peut ainsi transformer cette relation :

(71) $$\lambda = \frac{u_i}{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i q_i}{r}$$

Par conséquent, pour avoir λ constant, il faut que la somme des $u_i\, q_i$ soit constante ; même si les quantités au sein du budget changent, celles-ci étant affectées de la variation d'utilité (u_i) devront au total fournir une utilité constante ; quant à r, il est constant par hypothèse. En utilisant la relation $q_j = -\frac{\varphi_j}{\lambda}$,

on trouve :

(72) $$-\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i p_i}{r}$$

Et on a donc :

(73) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} p_i = \text{constante}$$

Les variations d'utilité dues aux prix affectées du prix de chaque bien devront, en définitive, s'annuler pour donner une utilité totale constante. C'est une condition analogue à la précédente qui avait trait aux quantités. On peut donc écrire, de façon précise, les deux conditions assurant l'invariance de λ :

a) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i = K$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} p_i = K \ (K = \text{constante})$$

Soit, l'invariance d'une fonction des quantités ou d'une fonction des prix et du revenu sur une surface donnée d'indifférence. On peut considérer la constante K comme une fonction quelconque de l'utilité totale, c'est-à-dire :

(74) $$K = \frac{1}{V'(U)}$$

Et si $V\ (U)$ est une fonction arbitraire, mais croissante de U, il vient :

(75) $$V'(U) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i = 1$$

en faisant intervenir la première condition d'invariance de λ. En transformant, on trouve :

(76) $$\sum_{i=1}^{n} q_i V'(U) \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = 1$$

La fonction $U\ (\mathcal{Q})$ remplacée par $V\ (\mathcal{Q})$ étant aussi une fonction croissante, pour obtenir l'invariance de λ et les conditions qui s'y rattachent, d'après la relation (76), il suffit de poser :

(77) $$\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = 1$$

Qu'est-ce à dire ? Cette relation signifie tout simplement que les chemins d'expansion sont des droites issues de l'origine (surface d'indifférence homothétique par rapport à l'origine) ; on rejoint ici la théorie du sentier d'expansion selon laquelle celui-ci s'exprime par une droite lorsque l'effet-revenu joue seul (accroissement du revenu réel et invariance dans le rapport des prix). On connaît évidemment les restrictions qu'il faut apporter à ce modèle pour qu'il soit susceptible de représenter la réalité économique : petits revenus ou regroupement des biens par classe.

Abordons maintenant le dernier point de cette section en observant comment le degré final d'utilité du revenu λ varie. Les élasticités partielles $\frac{E\lambda}{Er}$ et $\frac{E\lambda}{Ep}$ expriment la sensibilité de la valeur de λ aux variations de prix et de revenu (avec $\lambda = \Lambda\ (\overline{\mathrm{P}}, r)$.
Soient alors :

$$\Theta = \text{l'élasticité partielle } \frac{E_\lambda}{Er}$$

$$\text{et } \varepsilon_i = \text{l'élasticité au revenu } \frac{dq_i}{dr}\frac{r}{q}$$

Revenons à l'expression $\varphi_j = -\lambda\, q_j$ et si nous en prenons l'élasticité au revenu, on a :

$$\frac{E(\varphi_i)}{E(r)} = \frac{E(\lambda)}{E(r)} + \frac{E(q_i)}{E(r)} = \Theta + \varepsilon_i \tag{78}$$

On sait que $\partial r = \partial p_i\, q_i$ et $\partial \varphi_i = q_i\, \partial\lambda$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{E(\varphi_i)}{E(r)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\frac{r}{\varphi_i} = \frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\frac{r}{\varphi_i} \tag{79}$$

En multipliant par $\frac{p_i}{\lambda}\frac{\lambda}{p_i}$ et en regroupant, on trouve :

$$\frac{E(\varphi_i)}{E(r)} = \frac{E(\lambda)}{E(p_i)}\frac{\lambda}{p_i}\frac{r}{\varphi_i} = \frac{E(\lambda)}{E(p_i)}\frac{\lambda}{p_i}\frac{r}{-\lambda\, q_i} = \frac{-E(\lambda)}{E(p_i)}\frac{r}{p_i\, q_i} \tag{80}$$

Soit, en définitive :

$$\frac{E(\varphi_i)}{E(r)} = -\frac{E(\lambda)}{E(p_i)}\cdot\frac{1}{\alpha_i} \tag{81}$$

puisqu'on a toujours :

$$\alpha = \frac{p_i\, q_i}{r}$$

En comparant l'équation (81) à la relation (78), on trouve :

$$\frac{E\lambda}{Ep_i} = -\alpha_i(\Theta + \varepsilon_i) \tag{82}$$

Ce qui a pour effet de lier les variations de λ par rapport aux prix à celles de λ et q_i par rapport au revenu.

D'autre part, la différentielle logarithmique de λ nous donne :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{dr}{\lambda} + \frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\frac{dp_i}{\lambda} \tag{83}$$

En multipliant le premier terme de la dernière équation par $\frac{r}{r}$ et le second par $\frac{p_i}{p_i}$, nous faisons alors apparaître l'élasticité totale de λ qui s'écrit :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{E(\lambda)}{E(r)}\frac{dr}{r} + \sum_{i=1}^{n}\frac{E(\lambda)}{E(p_i)}\frac{dp_i}{p_i} \tag{84}$$

se rappelant que $\frac{E(\lambda)}{E(r)} = \Theta$ et en faisant intervenir la relation (82), on obtient :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \Theta\frac{dr}{r} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\Theta + \varepsilon_i)\frac{dp_i}{p_i} \tag{85}$$

Si z est l'indice monétaire par rapport au prix, il répond évidemment à la définition :

$$\frac{d_z}{z} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{dp_i}{p_i}$$

Et de là, on tire :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \Theta\left(\frac{dr}{r} - \frac{dz}{z}\right) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varepsilon_i\frac{dp_i}{p} \tag{86}$$

Le revenu réel ρ s'exprime par la relation $\rho = \frac{r}{z}$ et en se servant de la différentielle logarithmique, il vient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = d\left(\frac{r}{z}\right)\frac{z}{r} \tag{87}$$

Soit, en fait :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r} - \frac{dz}{z} \tag{88}$$

Et donc le terme $\Theta\left(\frac{dr}{r} - \frac{dz}{z}\right)$ de l'équation (86) s'écrit plus simplement :

$$\Theta\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

Enfin, si la moyenne pondérée des élasticités au revenu a pour valeur :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,.\, \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i} \,.\, \frac{\partial q_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i \partial q_i} \,.\, \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}{q_i} = 1 \tag{89}$$

on peut avancer que l'influence de cette relation sur la valeur de λ ne sera pas tellement modifiée si à l'élasticité du revenu, on donne sa valeur moyenne (estimateur de $\frac{E(q_i)}{E(r)}$), ce qui revient à dire : $\varepsilon_i = 1$ et ceci étant posé d'une façon toute générale. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \varepsilon_i \frac{dp_i}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dp_i}{p_i} = \frac{dz}{z} \tag{90}$$

ce qui est bien l'identification recherchée. Et la relation (86) devient finalement :

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \Theta\left(\frac{d\rho}{\rho}\right) - \frac{dz}{z} \tag{91}$$

Nous avons ainsi précisé les conditions auxquelles nous devions soumettre notre analyse pour que l'indice fonctionnel soit estimé par un indice monétaire. C'est en se référant à l'équation (91) que R. Roy écrit : « Dans ce cas particulier, l'indice z s'identifie donc avec l'indice fonctionnel... Nous constatons bien que sur une même surface d'indifférences, caractérisée par l'invariance du revenu réel ρ, W [λ dans notre texte] reste constant, ce qui est nous le rappelons la condition permettant d'identifier l'indice fonctionnel à un indice de type monétaire. »[7]

La rigueur du développement mathématique nous a conduit à l'équation (91) qui nous montre dans quelle condition (invariance de λ) l'indice fonctionnel s'apprécie par un indice monétaire. Pour terminer, il convient de voir les implications économiques sous-jacentes au résultat obtenu. L'invariance de l'utilité finale du revenu (λ) suppose (les équations 71 et 73 ont bien mis en évidence ces remarques) que le consommateur, face à un revenu constant et à des prix qui varient, augmente ou diminue ses quantités demandées de façon proportionnelle. Cette variation des prix modifie le revenu réel du consommateur et cette équi-partition des accroissements dans le revenu entre les divers biens peut sembler, du moins à première vue, difficile à admettre. En effet, lorsque le revenu s'accroît, le consommateur n'augmente ordinairement pas de façon proportionnelle sa demande pour les biens qu'il achète actuellement, mais dirige plutôt ses achats pour une partie, vers les biens présentement consommés et, pour une autre partie et peut-être la plus importante, vers des biens supérieurs ou de seconde nécessité. L'invariance de λ amène donc en pratique certaines conditions supplémentaires qui limitent les possibilités d'assimilation des indices en question. On estime en effet que seuls les individus à bas revenu, c'est-à-dire à faible niveau d'existence, dont les besoins fondamentaux ne sont pas encore pleinement satisfaits, réagiront dans le sens d'une équi-partition de l'accroissement du revenu entre les divers biens. Ces personnes consacrent leur revenu presque exclusivement à la satisfaction des besoins élémentaires et, par conséquent, une augmentation sensible du revenu servira à améliorer la satisfaction de ces besoins ; et comme ceux-ci sont à peu près d'égale importance, on peut conclure à une équi-partition probable de leur revenu supplémentaire entre leurs divers achats.

Yves RABEAU,
licencié en Sciences commerciales
(Montréal).

7. R. Roy, « Les nombres indices », *Journal de la Société statistique de Paris*, janvier-février 1949, p. 22.