

# Analyse et simulation topologiques en géographie, application à l'étude des migrations interrégionales

Rodolphe Lamarche and Jean Francon

Volume 19, Number 46, 1975

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/021253ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/021253ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Département de géographie de l'Université Laval

ISSN

0007-9766 (print)

1708-8968 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Lamarche, R. & Francon, J. (1975). Analyse et simulation topologiques en géographie, application à l'étude des migrations interrégionales. *Cahiers de géographie du Québec*, 19(46), 189–207. <https://doi.org/10.7202/021253ar>

Article abstract

The A.S.T. model, Analyse et Simulation Topologique, does for system analysis what multiple regression does for multivariate analysis. For an origin-destination table this model determines the gains effected by the dependent elements of the System for any change in the independent ; it calculates the transmission links and gains, and it also establishes the sensitivity of any element to fluctuations in any arc of the network. It is a model which should prove of considerable interest for studies of repercussion effects of flow fluctuations, or for the analysis of transmission flows in a diffusion process. It should also prove of value for the study of the evolution of a system to establish which elements are gaining in influence and which are being relegated to the outer fringes.

As an illustration, the model was applied to the study of the flow patterns of French migrant populations for the period 1962-68, by planning region.

## **ANALYSE ET STIMULATION TOPOLOGIQUES EN GÉOGRAPHIE**

**Application à l'étude des migrations interrégionales**

*par*

**Rodolphe LAMARCHE**

*Université d'Ottawa, Canada*

*et*

**Jean FRANCON**

*Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg, France*

Devant la nécessité d'étudier les phénomènes complexes de la localisation dans des réseaux où l'interdépendance dissymétrique est à la base de l'organisation spatiale, bon nombre de géographes se tournent vers l'analyse de système dans le but de saisir les lois du fonctionnement de l'ensemble plutôt que les lois propres à certains éléments seulement (voir les travaux de Reymond, Racine, Ray et Berry). Nous présentons ici une tentative de contribution à ce courant de recherche en développant un outil d'analyse et de simulation systématique, outil qui trouve son appui dans la théorie des graphes de transfert <sup>1</sup>.

Les électroniciens Chow et Cassignol (1965) à la suite de Mason, Coates, Bode, ont développé des algorithmes d'analyse de système pour l'étude des caractéristiques de réseaux d'amplification. Ponsard (1969) a présenté plusieurs modèles topologiques d'équilibre interrégional, modèles où il applique ces mêmes algorithmes à l'étude de réseaux économiques.

L'étude que nous présentons ici diffère des travaux de Ponsard et de ceux de Chow et Cassignol. Si nous nous attachons à mesurer les mêmes paramètres, nous n'utilisons pas les mêmes approches mathématiques. Plutôt que d'utiliser les algorithmes de Mason et de Coates nous avons adopté une méthode numérique plus opérationnelle pour nos besoins. Cette dernière approche a été possible parce que tout graphe de transfert trouve sa correspondance en termes de systèmes d'équations linéaires simultanées.

Ce travail comprend trois parties:

- 1) Le modèle d'analyse et de simulation topologique.
- 2) La modélisation mathématique.
- 3) L'interprétation géographique d'une analyse.

---

<sup>1</sup> Nous désirons remercier le professeur Henri Reymond, de l'Université de Strasbourg, qui fut à l'origine de cette recherche, et le professeur J.C. Bousquet de l'Université d'Ottawa, qui a relu et commenté ce texte.

## I. LE MODÈLE D'ANALYSE ET DE SIMULATION TOPOLOGIQUE

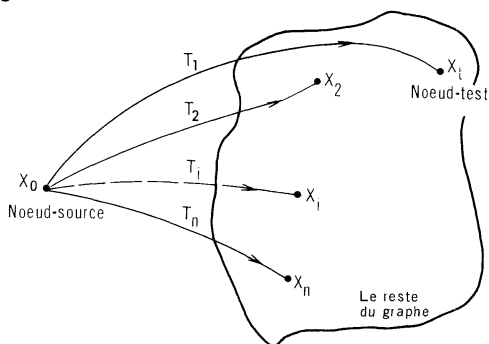
Le programme d'Analyse et de Simulation Topologique<sup>2</sup> (programme A.S.T.) est à l'analyse de système ce que la régression multiple est à l'analyse multivariée et cela à trois points de vue:

a) Alors que l'équation de régression permet de prévoir l'effet des variables indépendantes sur la dépendante, les GAINS DE SYSTÈME du modèle A.S.T. permettent de prévoir l'effet sur toutes les autres variables d'une variation de la variable indépendante, le nœud-source en terminologie des graphes de transfert.

b) Alors que les coefficients de corrélation et de détermination permettent de déterminer les liens réels qui existent entre les variables, les GAINS DE TRANSMISSION permettent de déterminer quelle proportion du gain créé au nœud-source est portée par chacun des arcs reliant le nœud-source au reste du réseau. Une impulsion du nœud-source vers le nœud-test, la région à l'étude, peut emprunter plusieurs arcs à la fois (voir figure 1). Cette transmission du gain se fait généralement d'une façon inégale sur ces arcs, en l'occurrence les arcs  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , parce que la transmission est conditionnée par l'organisation interne du reste du réseau reliant ces arcs au nœud-test. Il s'ensuit que l'étude de ces gains de transmission est une technique très utile pour arriver à connaître l'organisation hiérarchique du réseau, pour déterminer les lignes de transmission d'un processus de diffusion et finalement pour fonder une politique qui a pour objectif de réduire les disparités régionales en permettant de prévoir certaines conséquences systémiques directes et indirectes des décisions projetées.

c) Finalement, tout comme en analyse multivariée, on cherche par la corrélation partielle à annuler l'influence de certains variables en les considé-

**Figure 1**



### GAINS DE TRANSMISSION

rant constantes pour mieux connaître l'effet d'une variable indépendante en particulier; le modèle A.S.T. permet de connaître l'effet, sur un sommet spécifique, de chacun des arcs du système, c'est-à-dire la SENSIBILITÉ de ce nœud aux variations des arcs pris séparément. Ces trois caractéristiques sont à la base même de toute analyse systémique, d'où l'intérêt suscité par cette recherche.

<sup>2</sup> Les lecteurs désirant obtenir des renseignements supplémentaires sur la modélisation technique, la programmation en Fortran, peuvent s'adresser à Rodolphe Lamarche, 240 rue Daly, Ottawa, K1N 6G2, Canada.

### *L'hypothèse de linéarité*

Nous désirons insister sur un point essentiel concernant l'utilisation du programme A.S.T., à savoir *l'hypothèse de linéarité* sur laquelle repose la validité des conclusions qu'on pourrait tirer d'une analyse-simulation A.S.T.

Un système d'équations linéaires simultanées implique une hypothèse de linéarité. Il faut donc que, *théoriquement*, l'on puisse supposer des liaisons linéaires dans le réseau à l'étude. Dans certains cas cette hypothèse s'établit assez bien. Ainsi, dans une analyse économique entrées-sorties, cette hypothèse est valide à moins qu'une innovation technique ne vienne bouleverser les fonctions de production (Abler, Adams, Gould, 1971, p. 207). Si, dans un tel système, le secteur primaire fournit X biens au secteur secondaire, on peut supposer qu'une augmentation de la production du secteur secondaire se répercutera linéairement sur X.

Dans d'autres cas il n'est pas toujours aussi facile d'établir la linéarité du phénomène et la réflexion théorique devient déterminante. À titre d'exemple, voyons le cas de la migration de la population active en France pour les années allant de 1962 à 68. Est-il acceptable de prétendre que *chacune des entrées (ou sorties) dans la région j venant des autres régions i est proportionnelle à la sortie (ou entrée) totale de la région j*? Si oui, l'hypothèse de linéarité est valide et on peut établir les coefficients de linéarité et procéder à l'analyse. Pour calculer les coefficients de linéarité, on divise chaque cellule de chaque rangée du tableau entrées-sorties par la cellule correspondante de la colonne des totaux des rangées. Ainsi, pour la première rangée, on divise la première cellule de la rangée par le total de la première rangée. Le deuxième coefficient de cette première rangée est calculé en divisant la deuxième cellule de cette rangée par le total de la deuxième rangée et ainsi de suite.

Remarquons que, pour une durée très limitée, il y a toujours une relation de linéarité, une petite section de courbe, même très prononcée, pouvant toujours être considérée comme une droite. Pour des périodes de temps plus longues, périodes de recensement par exemple, il faut s'assurer de la linéarité, soit d'une façon théorique, soit d'une façon empirique: une droite de régression pourrait servir à cette fin.

### *Les graphes de transfert*

Le fondement théorique de cette recherche se trouve dans la théorie des graphes de transfert. Un graphe est un ensemble de sommets liés par un ensemble de relations,  $G(x,u)$ ;  $x$  est l'ensemble de sommets et  $u$  l'ensemble de liaisons. Un graphe de transfert est un type particulier de graphe parce qu'on peut lui associer un système d'équations linéaires simultanées. La variable indépendante, au choix, et les variables dépendantes constituent l'ensemble des sommets, l'ensemble  $x$ ; l'ensemble  $u$  est constitué de l'ensemble des relations entre les variables, les arcs du système. Les arcs du

système sont évalués à l'aide des paramètres des équations. Nous soulignons que ces paramètres sont des coefficients de linéarité, sans quoi il n'y a pas de graphe de transfert.

Donc: 
$$\sum_{j=0}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$x_0 =$  la variable indépendante.

En termes matriciels:

$$[a_{ij}] [x_j] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, n \end{array} \right.$$

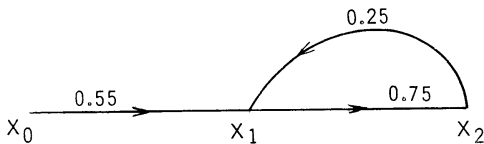
On peut construire le graphe de transfert directement à partir du système d'équations lorsqu'il est en forme canonique et que les coefficients de linéarité ont été calculés:

$$x_1 = 0,55 x_0 - 0x_1 + 0,25 x_2$$

$$x_2 = 0 x_0 + 0,75 x_1 + 0x_2$$

La forme canonique implique que, dans la première équation, c'est la première variable dépendante qui est isolée, dans la deuxième équation c'est la deuxième variable et ainsi de suite.

Figure 2



## LE GRAPHE

Notons les caractéristiques du graphe (figure 2):

- il n'y a aucun arc se dirigeant vers  $x_0$ ,
- $x_1$  a deux arcs qui s'orientent vers lui
- $x_2$  a un arc seulement orienté vers lui.

Si nous avons insisté quelque peu sur la préparation d'un graphe à partir d'un système linéaire c'est qu'il peut s'avérer utile dans certains cas de dresser le graphe pour mieux visualiser le réseau. Soulignons ici qu'un des aspects importants de ce travail a été de créer un outil qui puisse permettre la simulation de l'évolution du réseau. La programmation a été conçue d'abord en fonction de l'analyse et ensuite de la simulation. Le programme A.S.T. permet donc de faire évoluer un ou plusieurs arcs à volonté, dans le but de simuler les conséquences qu'auraient certaines politiques sur le réseau tout entier.

## II. LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

### Introduction

Le problème se présente comme suit: on a  $n$  variables (dites *variables dépendantes*) reliées entre elles et à une variable (dite *variable indépendante*) par  $n$  relations linéaires. Ces relations se présentent naturellement dans de nombreux problèmes, en particulier dans celui qui nous occupe, sous la forme d'un système dit *canonique* qui se lit comme suit:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = c_1 x_0 + t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + \dots + t_{1n} x_n \\ x_2 = c_2 x_0 + t_{21} x_1 + t_{22} x_2 + \dots + t_{2n} x_n \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_n x_0 + t_{n1} x_1 + t_{n2} x_2 + \dots + t_{nn} x_n \end{cases}$$

Remarquons que tous les coefficients  $c_i$  et  $t_{ij}$  de ce système sont positifs. Ceci n'influe pas la théorie qui suit mais peut avoir des conséquences utiles pour vérifier les calculs ou dans certains développements possibles de la théorie. Le problème mathématique est d'étudier la dépendance des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par rapport à  $x_0$  et aux coefficients caractérisant le système, les  $c_i$  et les  $t_{ij}$ . Cette étude se fait en résolvant, i.e. en exprimant chaque variable  $x_k, k = 1, 2, \dots, n$ , par rapport à  $x_0$  et aux coefficients  $c_i$  et  $t_{ij}$ . Une telle résolution est souvent présentée en termes de déterminants et de graphes. Cette approche présente certains avantages, en particulier quand de nombreux coefficients du système canonique sont nuls. Nous préférons ici une théorie en termes classiques d'algèbre linéaire qui est plus simple, pensons-nous, et qui se prête mieux à la programmation sur ordinateur et à l'analyse de la sensibilité comme on le verra plus loin, du moins pour les applications présentées ici. Tout d'abord on transforme le système de façon à obtenir dans les membres de gauche des égalités les seuls termes où figurent les variables dépendantes; on obtient le système:

$$(2) \quad \begin{cases} t_{(11)-1} x_1 + t_{12} x_2 + \dots + t_{1n} x_n = -c_1 x_0 \\ t_{21} x_1 + (t_{22} - 1) x_2 + \dots + t_{2n} x_n = -c_2 x_0 \\ \dots\dots\dots \\ t_{n1} x_1 + t_{n2} x_2 + \dots + (t_{nn} - 1) x_n = -c_n x_0 \end{cases}$$

Si l'on pose pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, n$

$$b_i = -c_i$$

$$a_{ij} = t_{ij} \text{ si } i \neq j$$

$$a_{ij} = t_{ij} - 1$$

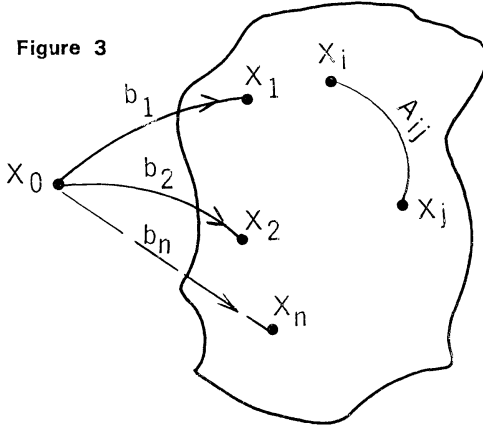
et on note  $b$  le vecteur de composantes  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ,  $x$  le vecteur de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $A$  la matrice dont les éléments sont les  $a_{ij}$ .

On peut écrire le système précédent sous la forme

$$(3) \quad Ax = x_0 b$$

Nous emploierons l'essentiel de la terminologie des graphes puisqu'elle est très imagée. On associe au système (3) un graphe, dit graphe de Coates (figure 3), formé de nœuds numérotés  $0, 1, 2, \dots, n$ , le nœud 0 étant dit le nœud-source, et d'arcs joignant le nœud  $j$  au nœud  $i$  si  $a_{ij}$  est non nul, pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, n$  et d'arcs joignant le nœud-source au nœud  $i$  si  $b_i \neq 0$ . On dit aussi que les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_i$  pondèrent les arcs correspondants. Remarquons qu'il n'y a pas d'arcs allant vers le nœud-source. Quand on s'intéresse à un nœud particulier, autre que le nœud-source, on dit que ce nœud est le nœud-test.

Figure 3



(3)

*Gains du système*

On appelle classiquement *gain du système du nœud-source au nœud  $i$*  (ou plus simplement gain au nœud  $i$ ) la quantité

$$(4) \quad g_i = \frac{x_i}{x_0}$$

et vecteur des gains le vecteur  $g$  de composantes  $g_1, g_2, \dots, g_n$

Le gain au nœud  $i$  représente la dépendance de la variable  $x_i$  par rapport à la variable indépendante  $x_0$ , ou la façon dont le graphe « transmet » l'influence du nœud-source au nœud-test  $i$ ; plus précisément c'est le coefficient de proportionnalité de  $x_i$  à  $x_0$ .

La forme matricielle (3) des équations du système entraîne l'équation du vecteur des gains

$$(5) \quad [A] \quad [g] = [b]$$

$$Ag = b$$

(6) dont la solution sous forme matricielle est

$$g = A^{-1} b$$

*Gains de transmission*

Explicitons l'équation (6): pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , on a

$$(7) \quad g_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n (-A^{-1})_{ij} C_j$$

En d'autres termes, le nombre  $(-A^{-1})_{ij}$ , c'est-à-dire l'élément de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne de la matrice  $-A^{-1}$ , est le coefficient multiplicatif du poids de l'arc joignant le nœud-source au nœud  $j$  dans le gain au nœud-test  $i$ . Il représente le coefficient d'influence de  $c_j$  sur le  $g_i$  (ou la variable  $x_j$ ). On l'appelle classiquement le *gain de transmission au nœud-test  $i$  de l'arc allant du nœud-source au nœud  $j$* . Remarquons qu'un gain de transmission est défini même s'il n'y a pas d'arc allant du nœud-source au nœud  $j$ .

*La sensibilité des gains*

En suivant les Mason, introduisons la sensibilité des gains par rapport aux variations des poids des arcs du graphe, qui est la variation relative d'un gain par rapport à une variation relative d'un coefficient du système; mathématiquement, si  $i$  est le nœud-test,  $A_{kl}$  un coefficient du système,  $k = 1, 2, \dots, n$  et  $l = 0, 1, \dots, n$  en convenant que  $A_{k0} = C_k$  si on note  ${}_iS_{kl}$  la sensibilité du gain au nœud-test  $i$  par rapport aux variations du coefficient  $A_{kl}$ , on a par définition

$${}_iS_{kl} = \frac{d g_i}{d a_{kl}} \cdot \frac{a_{kl}}{g_i} *$$

Sous une forme peut-être plus suggestive, on peut dire qu'une variation relative du coefficient  $A_{kl}$ , soit  $dA_{kl}/A_{kl}$ , induit une variation relative du gain  $g_i$ , soit  $d g_i/g_i$ , liée à  $dA_{kl}/A_{kl}$  par la relation

$$d g_i/g_i = {}_iS_{kl} d a_{kl}/a_{kl}$$

Nous allons donner une expression explicite de la sensibilité en fonction d'un gain de transmission du système.

Rappelons tout d'abord que si  $V$  est un vecteur de composantes  $v_1, v_2, \dots, v_n$  qui dépendent d'une variable  $x$ , on note  $\frac{d v}{d x}$  le vecteur de composantes  $\frac{d v_n}{d x}, \frac{d v_2}{d x}, \dots, \frac{d v_1}{d x}$ . De même, si  $M$  est une matrice dont

les éléments sont  $m_{ij}$  et dépendent d'une variable  $x$ , on note  $\frac{d M}{d x}$  la

matrice dont les éléments sont  $\frac{d m_{ij}}{d x}$ .

Distinguons deux cas:

*Premier cas:* calcul de la sensibilité du gain au nœud-test  $i$  par rapport au coefficient  $c_k = a_{k0}$  qui correspond à un arc émanant du nœud-source.

\* En raison de problèmes techniques d'impression, on a utilisé la lettre  $d$  comme symbole de la dérivée partielle.



D'après l'équation (7) et comme les gains de transmission ne dépendent pas des coefficients  $c$  on a,

$$\frac{d g_i}{d c_k} = (-A^{-1})_{ik}$$

d'où

$$(8) \quad {}_i S_{k0} = (-A^{-1})_{ik} \frac{c_k}{g_i}$$

*Deuxième cas:* sensibilité du gain au nœud-test  $i$  par rapport à un coefficient  $a_{kl}$  ( $1 \leq k \leq n$ ,  $i \leq l \leq n$ ) n'émanant pas du nœud-source.

Calculons tout d'abord le vecteur  $\frac{d g}{d a_{kl}}$ . D'après l'équation fondamentale (6)

$$(9) \quad \frac{d g}{d a_{kl}} = \frac{d A^{-1}}{d a_{kl}} b$$

puisque le vecteur  $b$  ne dépend pas de  $a_{kl}$

La matrice  $\frac{d A^{-1}}{d a_{kl}}$  n'est pas difficile à calculer si on emploie les techniques

de l'algèbre linéaire. En effet, on a  $AA^{-1} = I$  la matrice unité. En dérivant on obtient:

$$\frac{d (AA^{-1})}{d a_{kl}} = 0$$

la matrice dont tous les coefficients sont nuls. Ce qu'on peut encore écrire:

$$\frac{d A}{d a_{kl}} A^{-1} + A \frac{d A^{-1}}{d a_{kl}} = 0$$

$$\frac{d A^{-1}}{d a_{kl}} = -A^{-1} \frac{d A}{d a_{kl}} A^{-1}$$

En substituant dans (9), on a:

$$\frac{d g}{d a_{kl}} = -A^{-1} \frac{d A}{d a_{kl}} A^{-1} b$$

qui se simplifie, en utilisant (6), en:

$$\frac{d g}{d a_{kl}} = -A^{-1} \frac{d A}{d a_{kl}} g$$

$$(10) \quad \frac{d g_i}{d a_{kl}} = -g_l (A^{-1})_{ik}$$

D'où finalement:

$$(11) \quad {}_i S_{kl} = (-A^{-1})_{ik} g_l \frac{a_{kl}}{g_i}$$

*L'indice de variation globale et la sensibilité globale*

La notion de sensibilité introduite précédemment permet d'étudier la variation du gain de façon ponctuelle, c'est-à-dire en un nœud-test particulier par rapport à un coefficient particulier du système.

Il peut cependant être intéressant d'avoir des mesures plus globales. Tout d'abord, en se fixant toujours un nœud-test  $i$ , nous introduisons une mesure de la variation absolue du gain  $g_i$  par rapport à tous les coefficients du système:

$$(12) \quad I_i = \left( \frac{1}{n} \sum_j \left( \frac{d g_i}{d b_j} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{kl} \left( \frac{d g_i}{d a_{kl}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous appelons cette quantité *l'indice de variation globale* au nœud-test  $i$ . Ensuite, nous introduisons une quantité appelée la *sensibilité globale* du système, en suivant les idées introduites en analyse numérique (voir par exemple l'équation (4)). Cette quantité ne dépend pas d'un nœud-test particulier ni d'un coefficient particulier mais synthétise, pourrait-on dire, l'influence de tous les coefficients sur toutes les variables ensemble.

Rappelons tout d'abord quelques définitions: on appelle *norme d'un vecteur*  $V$  et on note  $\|V\|$  la plus grande valeur absolue de ses composantes; et *normes d'une matrice*  $M$ , qu'on note  $\|M\|$ , la plus grande somme des valeurs absolues des éléments des lignes de  $M$ , soit

$$\|M\| = \max_i \sum_j \|M_{ij}\|$$

Par définition la *sensibilité globale* du système est

$$(13) \quad S_g = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Son intérêt vient des propriétés suivantes: puisque  $g = A^{-1} b$ , quand  $b$  varie de  $\Delta b$  alors  $g$  varie de  $\Delta g$  et on a

$$(14) \quad \frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \leq S_g \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

quand  $A$  varie de  $\Delta A$  alors  $g$  varie de  $\Delta g$  et on a

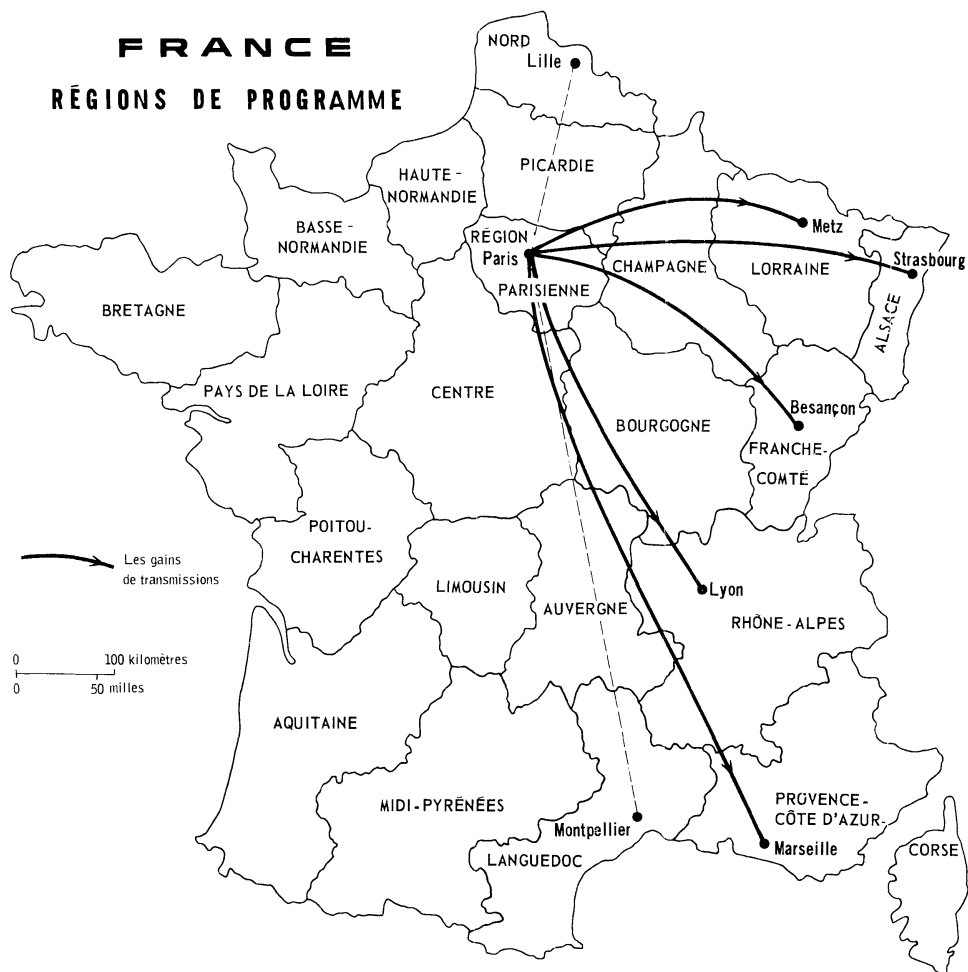
$$(15) \quad \frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Dans les deux cas l'égalité peut être atteinte. Les quantités  $\|\Delta A\|$  et  $\|\Delta b\|$  sont à considérer comme des mesures globales de variations effectuées sur  $A$  et  $b$ , quels que soient les éléments de  $A$  et  $b$  sur lesquels portent effectivement les variations. De même  $\|\Delta g\|$  est à considérer comme une mesure de la variation globale du vecteur  $g$  induite soit par  $\Delta b$  soit par  $\Delta A$ . Les relations (14) et (15) signifient que la variation relative globale du vecteur  $g$  induite par une variation soit de  $A$  soit de  $b$ , ne peut pas dépasser une certaine valeur, proportionnelle à la sensibilité globale.

### III. L'INTERPRÉTATION GÉOGRAPHIQUE D'UNE ANALYSE

Soulignons dès le départ que nous ne présentons ici qu'une étude sommaire, à titre d'exemple. La modélisation A.S.T. a été faite dans le but d'analyser le réseau des échanges à l'intérieur du système urbain canadien mais comme, pour des raisons d'ordre technique, il y a eu quelque retard dans l'obtention des données, nous y substituons des données se rapportant à la migration de la population active en France pour la période 1962-1968<sup>3</sup>. L'analyse détaillée de ce phénomène nous conduirait trop loin; nous nous contenterons de souligner les aspects particuliers de cette migration que fait ressortir l'A.S.T. Si la vérification des hypothèses soulevées ici reste à faire, nous faisons remarquer que, pour un processus aussi complexe que la migration interrégionale, le fait de voir ce phénomène sous un angle nouveau est en soi un résultat important de l'étude. La région parisienne

Figure 4



<sup>3</sup> Collections de l'I.N.S.E.E., Série D. No. 3.

est prise comme variable indépendante et la région de l'Alsace comme nœud-test (figure 4). L'étude en profondeur exigerait que l'on prenne à tour de rôle, comme variable indépendante, toutes les régions de façon à déterminer les gains de transmission sur les arcs émanant de chacune des régions.

Les gains de système sont exprimés dans le tableau 1.

Tableau 1

*Le gain de système*

*Le vecteur de gains comprend tous les gains du sommet X-O, (le nœud-source, l'Indépendante,) à tous les autres sommets du système*

<i>Dépendante</i>	<i>Indépendante</i>	<i>Gain</i>
1 LOIRE	RÉG. PARISIENNE	0.3277
2 PROVENCE	RÉG. PARISIENNE	0.3143
3 BRETAGNE	RÉG. PARISIENNE	0.3079
4 RHÔNE	RÉG. PARISIENNE	0.3033
5 CENTRE	RÉG. PARISIENNE	0.2981
6 AQUITAINE	RÉG. PARISIENNE	0.2932
7 NORD	RÉG. PARISIENNE	0.2875
8 PYRÉNÉES	RÉG. PARISIENNE	0.2661
9 POITOU	RÉG. PARISIENNE	0.2458
10 LORRAINE	RÉG. PARISIENNE	0.2436
11 PICARDIE	RÉG. PARISIENNE	0.2376
12 LANGUEDOC	RÉG. PARISIENNE	0.2301
13 BASSE-NORMANDIE	RÉG. PARISIENNE	0.2261
14 BOURGOGNE	RÉG. PARISIENNE	0.2254
15 HAUTE-NORMANDIE	RÉG. PARISIENNE	0.1849
16 CHAMPAGNE-ARDENNE	RÉG. PARISIENNE	0.1794
17 AUVERGNE	RÉG. PARISIENNE	0.1704
18 FRANCHE-COMTÉ	RÉG. PARISIENNE	0.1192
19 LIMOUSIN	RÉG. PARISIENNE	0.1140
20 ALSACE	RÉG. PARISIENNE	0.0905
21 CORSE	RÉG. PARISIENNE	0.0297

*Statistiques descriptives*

Moyenne	0.2236	Erreur standard	0.0179	Médiane	0.2376
Mode	0.0297	Écart-type	0.0820	Variance	0.0067
Kurtose	-0.5200	Dissymétrie	-0.7166	Écart	0.2980
Minimum	0.0297	Maximum	0.3277		

Le gain de système à un nœud donné exprime l'effet dans cette dépendante de tout changement dans l'indépendante, le nœud-source.

Par définition le gain au sommet  $i$  est:

$$g_i = \frac{x_i}{x_o}$$

En se référant au tableau 1 on remarque que la région de la Loire est la région présentant le plus fort gain, soit 0,2377. Ainsi, si la région parisienne émet un flux de 10 000 personnes vers les autres régions de la France, celle de la Loire serait à même d'émettre à son tour vers ces autres régions un flux de:

$$x_2 = g_2 x_0$$

$$x_2 = 0,2377 \times 10\ 000$$

$$x_2 = 3277 \text{ personnes.}$$

*Les gains de système du tableau 1 donnent donc les émissions qui résulteraient de chacune des 21 régions pour chaque unité sortant de la région parisienne.* Ce tableau indique que la moyenne des gains est de 0,2236 avec un écart-type de 0,0820 ce qui suppose un réseau à forte interdépendance. La dissymétrie est légèrement négative soit  $-0,72$ , par suite des faibles gains en Corse d'abord, et à un moindre titre, en Alsace. Les régions ayant de forts gains se regroupent comme suit.

En premier lieu il y a les régions qui ont par tradition de fortes liaisons migratoires avec la région parisienne. Ce sont les régions du sud et de l'ouest, la Loire, la Bretagne, le Centre, l'Aquitaine et les Pyrénées. Nous pouvons interpréter ces gains élevés comme des retours de migrations, par exemple des flux de retraités et de fonctionnaires retournant à leur lieu d'origine.

En deuxième lieu il y a les régions qui constituent des pôles de croissance, pôles qui exercent une forte attraction sur la population active, et bénéficient de par leur position dans la hiérarchie régionale directement des impulsions venues de Paris, la région du Rhône et celle de la Provence. Ces régions, comme celle du premier groupe mais pour des raisons différentes, sont des zones fortement intégrées à la vie économique du pôle national. Ces deux groupes de régions suivent d'assez près les pulsations migratoires de la région parisienne, c'est-à-dire que pour chaque unité sortant de la région parisienne il en sort environ 0,3000 de ces régions.

À l'autre extrémité du tableau 1, on retrouve également deux groupes. Il y a d'abord des régions déprimées: L'Auvergne, le Limousin et la Corse. Pour chaque émission de la région parisienne il y a très peu de répercussion similaire en ces régions dont le rythme de la vie économique est différent et ne suit que faiblement les fluctuations parisiennes. L'Alsace et la Franche-Comté forment le deuxième groupe à faibles gains. Ce sont des régions à bonne santé économique et démographique. Peut-être avons-nous ici des régions plus indépendantes de Paris quant aux flux migratoires. Ce sont des régions où l'on a sur place une population qualifiée en croissance et un type de développement autonome. Toute émission de la région parisienne n'entraîne pas de réaction semblable en ces deux régions.

Pour vérifier toutes ces hypothèses il faudrait prendre ces régions comme variables indépendantes à tour de rôle, mais tel n'est pas notre but ici.

En somme toute politique visant à faire émigrer une partie de la population active hors de la région parisienne serait moins efficace pour les régions à forts gains. Par contre toute tentative de diriger de ces émigrants vers les régions à faibles gains serait plus efficace, la réaction du système étant plus atténuée en ces secteurs. Remarquons *qu'en transposant la matrice entrées-sorties* nous pourrions déterminer la portée d'une politique visant à attirer la main-d'œuvre vers chacune des régions du réseau.

**Tableau 2**

**Les gains de transmission pour le nœud-test: Alsace**

*Le gain de transmission représente pour chaque nœud la façon dont chaque arc partant du nœud-source est amplifié au nœud-test.*

*Il y a donc un gain de transmission pour tous les nœuds même s'il n'y a pas d'arc émanant du nœud-source vers tous les nœuds.*

1	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	ALSACE	1.0846
2	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	LORRAINE	0.1119
3	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	FRANCHE-COMTÉ	0.1086
4	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	RHÔNE	0.0936
5	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	PROVENCE	0.0811
6	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	CHAMPAGNE-ARDENNE	0.0567
7	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	BOURGOGNE	0.0513
8	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	LANGUEDOC	0.0479
9	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	AUVERGNE	0.0412
10	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	CORSE	0.0397
11	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	AQUITAINE	0.0388
12	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	CENTRE	0.0363
13	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	PYRÉNÉES	0.0353
14	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	HAUTE-NORMANDIE	0.0314
15	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	PICARDIE	0.0303
16	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	NORD	0.0280
17	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	LIMOUSIN	0.0259
18	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	POITOU	0.0233
19	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	BRETAGNE	0.0227
20	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	LOIRE	0.0223
21	SUR L'ARC RÉG. PARISIENNE	BASSE-NORMANDIE	0.0191

*Statistiques descriptives*

Moyenne	0.0967	Erreur standard	0.0498	Médiane	0.0388
Mode	0.0191	Écart-type	0.2281	Variance	0.0520
Kurtose	13.7633	Dissymétrie	3.8523	Écart	1.0655
Minimum	0.0191	Maximum	1.0846		

Les gains de transmission sont exprimés dans le tableau 2. Il existe, pour chaque nœud-test, un vecteur de gains de transmission. Ces gains représentent la façon dont chaque arc sortant du nœud-source est amplifié pour donner le gain total du système au nœud-test en question. Ici nous prenons la région de l'Alsace comme nœud-test, c'est la neuvième variable dépendante de notre matrice entrées-sorties. Par définition le gain du système au nœud-test No. 9 est

$$g_q = T_q \cdot b$$

$g_q$  = le gain à la neuvième variable dépendante.

$T_g$  = la neuvième ligne de la matrice inverse, les gains de transmission.

$b$  = le vecteur colonne des coefficients sortant de l'indépendante, le nœud-source (figure 5).

Figure 5

		T					
	Ardenne	-----	-----	Alsace	-----	b	
						0,0558	
9°	Alsace	0,0567	-----	1,0845	-----	0,0205	

0,0905
--------

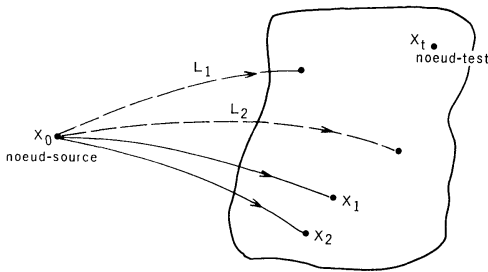
$g_g$

### LE CALCUL DU GAIN DE SYSTÈME AU NOEUD-TEST 9

Comme nous avons le produit matriciel d'un vecteur-rangée par un vecteur colonne, chaque élément de la neuvième ligne est le coefficient multiplicatif d'un des arcs du vecteur  $b$ , les arcs reliés au nœud-source. Chacun de ces coefficients se nomme gain de transmission.

Il importe de noter que même lorsqu'il n'existe pas d'arc reliant le nœud-source à un autre nœud quelconque du réseau, le gain de transmission est tout de même défini. Ainsi si nous avons un réseau où chacune des régions dépendantes n'est pas liée directement au nœud-source (ce n'est pas le cas pour les flux de migrations analysés ici), l'on pourrait déterminer directement à partir de ce vecteur de gains de transmission la part du gain de système qui serait transmise par cette nouvelle liaison au nœud-source et cela sans nouveau calcul (figure 6).

Figure 6



$L_1$  et  $L_2$  : DES LIAISONS PROJÉTÉES

L'ensemble donné ici, si l'on constatait des variations importantes d'une période d'analyse à une autre, cela pourrait indiquer un changement de transparence dans l'espace national.

L'Alsace a un *gain de système* de 0,0905 selon le tableau 1, et l'arc Paris-Alsace a un *gain de transmission* de 1,0845 selon le tableau 2. Comme l'émission de la région parisienne sur l'Alsace est de 4 732 sur un total de 231 392 sortant de la région parisienne, le coefficient de linéarité sur cet arc a une valeur de 0,0205. Mais comme le *gain du système* pour l'Alsace est le produit du vecteur rangée des *gains de transmission* par le vecteur-colonne des coefficients des arcs sortant de la région parisienne (figure 2), le gain du système pour l'Alsace porté par l'arc direct Paris-Alsace est de:

$$g_{q_i} = T_{q_i,1} \ b_1$$

$$0,0222 = 1,0845 \times 0,0205$$

L'arc porte donc 24% du gain total du système pour ce nœud. Les autres arcs ont des gains de transmission beaucoup plus faibles.

La moyenne des gains de transmission est de 0,097 et l'écart-type de 0,228. Donc aucune autre région ne transmet les impulsions Paris-Alsace d'une façon fortement préférentielle. On note cependant que les arcs reliant la région parisienne aux régions à la fois dynamiques et limitrophes de l'Alsace, les arcs Paris-Lorraine et Paris-Franche-Comté, de même que les arcs reliant les grands pôles provinciaux à Paris, les arcs Paris-Rhône et Paris-Provence, sont porteurs de gains également, mais à un degré beaucoup moindre que l'arc direct Paris-Alsace. Toutes les régions à l'ouest de la ligne Montpellier-Paris-Lille (voir figure 4) ont très peu de liens avec l'Alsace et ne participent pas au gain de système au nœud-test Alsace. On peut voir ici soit l'influence de l'effet de distance, soit l'effet de substitution selon la théorie d'interaction d'Ullman (1956). En effet, soit que les émigrants de l'Alsace répugnent à aller vers les régions éloignées, soit qu'ils trouvent en route des emplois dans les zones à l'est de cette ligne de démarcation, ces régions agissant comme filtre pour réduire les flux à plus longue portée.

Cette propriété des gains de transmission peut être utile dans l'analyse de réseaux où de nouvelles liaisons directes au nœud-source sont projetées, par exemple un réseau routier. De plus, comme nous avons le loisir de déterminer à volonté la variable qui servira de variable indépendante, cette propriété des gains de transmission devient capitale pour la prévision systémique. Finalement, notons que pour l'en-



Tableau 3

*Les sensibilités du gain aux variations des arcs**N.B. : On mesure ici les sensibilités du gain au nœud-test : Alsace**La sensibilité globale du réseau : 9.1684*

1	L'ARC RÉG. PARISIENNE	ALSACE	0.244941
2	L'ARC LORRAINE	ALSACE	0.228338
3	L'ARC RHÔNE	ALSACE	0.097502
4	L'ARC PROVENCE	ALSACE	0.094601
5	L'ARC RÉG. PARISIENNE	PROVENCE	0.083704
6	L'ARC FRANCHE-COMTÉ	ALSACE	0.082378
7	L'ARC RÉG. PARISIENNE	RHÔNE	0.077876
8	L'ARC RÉG. PARISIENNE	LORRAINE	0.066504
9	L'ARC PROVENCE	RHÔNE	0.064644
10	L'ARC RHÔNE	PROVENCE	0.058882
11	L'ARC RÉG. PARISIENNE	CENTRE	0.057450
12	L'ARC RÉG. PARISIENNE	AQUITAINE	0.046642
13	L'ARC RÉG. PARISIENNE	BOURGOGNE	0.043297
14	L'ARC AQUITAINE	ALSACE	0.040783
15	L'ARC ALSACE	LORRAINE	0.040661
16	L'ARC RÉG. PARISIENNE	BRETAGNE	0.038170
17	L'ARC RÉG. PARISIENNE	PYRÉNÉES	0.035464
18	L'ARC CHAMP-ARDENNE	ALSACE	0.035194
19	L'ARC RÉG. PARISIENNE	CHAMPAGNE-ARDENNE	0.034944
20	L'ARC RÉG. PARISIENNE	PICARDIE	0.034691
21	L'ARC CENTRE	ALSACE	0.033537
22	L'ARC RÉG. PARISIENNE	LANGUEDOC	0.032761
23	L'ARC RÉG. PARISIENNE	LOIRE	0.031893
24	L'ARC CHAMP-ARDENNE	LORRAINE	0.031666
25	L'ARC LANGUEDOC	PROVENCE	0.031572
26	L'ARC RÉG. PARISIENNE		

Comme nous venons de l'illustrer, l'analyse des gains de transmission peut ajouter beaucoup à notre compréhension du fonctionnement d'un système. *La sensibilité* est exprimée dans le tableau 3. L'étude des indices de sensibilité vient compléter notre connaissance du réseau. Nous mesurons ici la sensibilité du gain de système en Alsace pour toute variation sur chacun des arcs du réseau pris séparément, soit pour un réseau de 22 régions et 439 arcs. Comme la sensibilité est une mesure relative, nous n'avons pas calculé les statistiques descriptives du vecteur des sensibilités.

La sensibilité du nœud-test aux variations sur l'arc "a" allant du nœud k au nœud l se définit:

$${}_i S_{kl} = \frac{d g_i}{g_i} \cdot \frac{d a_{kl}}{a_{kl}}$$

Donc une variation relative du coefficient  $a_{ki}$  induit une variation relative du gain au point  $i$ . À titre d'exemple examinons l'effet de l'indice de la sensibilité sur le gain au nœud-test Alsace pour une variation des flux sur l'arc Paris-Lorraine.

L'indice de sensibilité pour l'arc Paris-Lorraine (tableau 3):	0,0665
Le gain du système pour l'Alsace (tableau 1):	0,0905
L'émission de la Lorraine vers Paris:	12 448,0000
La sortie totale de la région parisienne:	231 392,0000
Le coefficient de linéarité:	0,054

Si nous doublons la valeur de ce coefficient et calculons le changement dans le gain au nœud-test nous obtenons:

$$\begin{aligned} dg_i &= S_{ki} \frac{da_{ki}}{a_{ki}} \cdot g_i \\ &= 0,0665 \frac{0,108}{0,054} 0,0905 \\ &= 0,1122 \end{aligned}$$

Nous constatons que la croissance du gain est très faible même lorsque le coefficient de linéarité est doublé sur cet arc parce que: a) la sensibilité du gain est très peu touchée par les variations sur cet arc, et b) le gain au nœud-test est très faible au départ. En somme, les variations sur cet arc n'ont que très peu d'influence sur le gain du système à ce sommet. *On voit immédiatement l'utilité d'une telle technique* pour la planification économique.

L'indice de sensibilité mesure donc l'influence qu'exerce un arc quelconque sur le gain du système au nœud-test en question. Si le gain est faible dès le départ, c'est que la région dépendante est très reliée à la région indépendante et donc peu sensible aux fluctuations des arcs d'un réseau où elle se trouve mal intégrée. Si le gain de système au nœud-test est élevé mais l'arc en question est peu lié systématiquement (matriciellement) au nœud-test, l'arc en question lie des régions marginales par rapport au nœud-test et le gain à ce dernier est pratiquement indépendant des fluctuations sur l'arc. Il est donc peu *sensible* aux variations de l'arc.

Dans ce réseau de migrations il n'y a que quatre *arcs directs* qui affectent l'Alsace; trois relient l'Alsace aux grands pôles de croissance, les arcs Paris-Alsace, Rhône-Alsace et Provence-Alsace (tableau 3), et un qui relie l'Alsace à la Lorraine. Toute migration sur ces arcs influe sur le gain au nœud-test. De ces quatre, les arcs Paris-Alsace et Lorraine-Alsace sont de loin les plus forts ayant une sensibilité moyenne de 0,23. La croissance relative dans le gain au nœud  $i$ ,  $\frac{dg_i}{g_i}$  sera donc de 23% du gain relatif dans l'arc en question  $\frac{da_{ki}}{a_{ki}}$ . Notons que les variations sur l'arc Fran-

che-Comté-Alsace affectent l'Alsace beaucoup moins que celles sur l'arc Lorraine-Alsace.

En somme, les sensibilités les plus fortes se regroupent ainsi: a) un premier groupe, les arcs Paris-Alsace et Lorraine-Alsace, de loin les plus forts; b) un deuxième groupe comprenant les pôles provinciaux, Rhône-Alsace et Provence-Alsace et c) un troisième groupe d'un seul membre, l'arc Franche-Comté-Alsace.

Les arcs exerçant quelque influence sur le nœud-test forment trois groupes: a) les arcs qui lient l'Alsace aux pôles de croissance: Paris-Alsace, Rhône-Alsace, Provence-Alsace; b) les arcs liant l'Alsace à ses deux voisins; Lorraine-Alsace et Franche-Comté-Alsace; c) les arcs liant les pôles de croissance entre eux: Paris-Provence, Paris-Rhône et Provence-Rhône. À ce dernier groupe nous pourrions ajouter l'arc Paris-Lorraine.

### Conclusion

Comme on a pu le constater, l'analyse de réseau par les paramètres de gains de système, gains de transmission et indices de sensibilité est une technique très prometteuse pour la compréhension du fonctionnement des systèmes spatiaux. Nous espérons tirer de l'étude des indices de sensibilité globale et de variation globale, une connaissance approfondie de ces paramètres, connaissance qui nous permettrait d'utiliser l'analyse systémique exposée dans ce texte pour des fins de planification.

### BIBLIOGRAPHIE

- ABLER, R., ADAMS, J. S., GOULD, P. (1971) *Spatial Organization*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 589 p.
- CHOW, Y. et CASSIGNOL, E. (1965) *Théorie et application des graphes de transfert*. Paris, Dunod, 158 p.
- FORSYTHE, G., MOLER, C.B. (1967) *Computer Solutions of Linear Algebraic Systems*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.
- PONSARD, Claude (1969) *Un modèle topologique d'équilibre économique interrégional*. Paris, Dunod, 126 p.
- ROTA, Joseph (1971) *Graphes de transfert et dynamisation d'un modèle entrées-sorties*. Paris, Dunod, 197 p.
- ROUGET, Bernard (1971) *Modèles de gravitation et Théorie des Graphes*. Paris, Dunod, 147 p.
- VUEZ, Jean-Marie (1971) *Graphes de transfert et variations des coefficients techniques d'un modèle entrées-sorties*. Paris, Dunod, 113 p.
- ULLMAN, Edward L. (1956) « The Role of Transportation and the Bases for Interaction ». In *Man's Role in Changing the Face of the Earth*, ed. W.L. THOMAS, Jr. et al., Chicago, Univ. of Chicago Press.

## RÉSUMÉ

**LAMARCHE, Rodolphe et FRANCON, Jean : Analyse et simulation topologique en géographie.**

Le modèle d'Analyse et de Simulation Topologique est à l'analyse de système ce que l'analyse de régression multiple est à l'analyse multivariée. Pour un système de flux ce modèle détermine les gains effectués par tous les noeuds dépendants pour tout changement de flux dans le noeud principal ; il détermine l'importance des diverses lignes de transmission entre les éléments et il permet de connaître la sensibilité d'un élément aux variations de flux sur tout arc du réseau. C'est un modèle qui pourrait s'avérer très utile pour des études d'interdépendance systémique ou pour une recherche sur les lignes de transmissions d'un phénomène de diffusion. C'est une technique très intéressante également pour mesurer l'évolution d'un réseau et connaître les éléments qui ont tendance à être refoulés en marge du système par d'autres qui prennent de l'importance.

À titre d'illustration, le modèle a été appliqué à l'étude des migrations de populations en France pour les années 1962-68, dans le cadre des régions de programme.

**MOTS-CLÉS : Géographie quantitative, analyse topologique, théorie des graphes de transfert, analyse de système( flux interrégionaux. France, régions de programme.**

## ABSTRACT

**LAMARCHE, Rodolphe and FRANCON, Jean : Topological analysis and simulation in Geography**

The A.S.T. model, Analyse et Simulation Topologique, does for system analysis what multiple regression does for multivariate analysis. For an origin-destination table this model determines the gains effected by the dependent elements of the system for any change in the independent ; it calculates the transmission links and gains, and it also establishes the sensitivity of any element to fluctuations in any arc of the network. It is a model which should prove of considerable interest for studies of repercussion effects of flow fluctuations, or for the analysis of transmission flows in a diffusion process. It should also prove of value for the study of the evolution of a system to establish which elements are gaining in influence and which are being relegated to the outer fringes.

As an illustration, the model was applied to the study of the flow patterns of French migrant populations for the period 1962-68, by planning region.

**KEY WORDS : Quantitative geography, topological analysis, graph theory, system analysis, interregional flow pattern. France, planning regions.**