Assurances et gestion des risques
Insurance and Risk Management

La théorie économique du risque : une relecture de quelques contributions fondamentales

Louis Eeckhoudt and Christian Gollier

Volume 81, Number 1-2, 2013

Numéro spécial sur l'histoire de l'assurance

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1091797ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1091797ar

See table of contents

Publisher(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (print)
2371-4913 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Eeckhoudt, L. & Gollier, C. (2013). La théorie économique du risque : une relecture de quelques contributions fondamentales. *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, *81*(1-2), 47–57. https://doi.org/10.7202/1091797ar

Article abstract

In this paper we underline some little known links that exist between fundamental papers in the economic theory of risk. To this end we follow a chronological order from Bernoulli (1738) to Rothschild-Stiglitz (1970-1971).

Assurances et gestion des risques, vol. 81(1-2), mars-avril 2013, 47-57
Insurance and Risk Management, vol. 81(1-2), March-April 2013, 47-57

La théorie économique du risque : une relecture de quelques contributions fondamentales

par Louis Eeckhoudt et Christian Gollier

RÉSUMÉ

Dans ce papier nous mettons en évidence les liens – peu connus – qui existent entre quelques contributions fondamentales de la théorie économique du risque. Pour ce faire, nous suivons un ordre essentiellement chronologique de Bernoulli (1738) à Rothschild-Stiglitz (1970-1971).

ABSTRACT

In this paper we underline some little known links that exist between fundamental papers in the economic theory of risk. To this end we follow a chronological order from Bernoulli (1738) to Rothschild-Stiglitz (1970-1971).

1. INTRODUCTION

Les contributions qui ont été à la base de la théorie économique du risque sont aujourd'hui bien connues et elles sont décrites dans la plupart des manuels qui abordent ces thématiques.

Les auteurs :

Louis Eeckhoudt, IESEG School of Management, Lille, France. Christian Gollier, Toulouse School of Economics, Toulouse, France.

Les auteurs remercient particulièrement un arbitre anonyme dont les commentaires ont contribué à l'amélioration du texte initial.

Cet article a fait l'objet d'une évaluation par des lecteurs indépendants et membres des comités de la Revue./This article was subject to an evaluation by independant reviewers and members of the Journal Committees.

Dans le présent article nous allons mettre en avant des liens qui unissent ces différentes contributions et qui ont été peu évoqués jusqu'ici. Alors qu'elles paraissent à première vue très disparates, les contributions qui fondent notre discipline présentent des complémentarités parfois surprenantes. Ce sont celles-ci que nous allons évoquer dans ce texte.

Notre point de départ sera un aspect peu connu de l'article de Bernoulli (1738) qui anticipe de façon surprenante les textes centraux de Rothschild-Stiglitz (1970-1971). Entre ces deux points de repère, on trouve au milieu des années soixante les travaux de Arrow (1965) et de Pratt (1964) qui avaient eux été anticipés par les papiers de Friedman et Savage (1948, 1952).

Dans le présent papier nous convions le lecteur à une relecture de ces travaux où nous mettons également en évidence certains de leurs aspects moins connus. Comme le lecteur le constatera nous suivons essentiellement un ordre chronologique dans la présentation des différentes contributions avec quatre points de repère : Bernoulli (1738), Friedman-Savage (1948), Arrow-Pratt (1964) et enfin Rothschild-Stiglitz (1970).

2. BERNOULLI, D. (1738)

L'article fondateur de Bernoulli (1738) a été longtemps ignoré[1] et son élément le plus connu aujourd'hui – le célèbre « paradoxe de St-Pétersbourg » – est sans doute de notre point de vue le moins directement intéressant.

Sans jamais utiliser des termes très connus aujourd'hui tels que utilité marginale, prime de risque ou variance, Bernoulli va mettre en évidence les notions correspondantes de façon très intuitive. Dès le début de son article (§4) il annonce clairement cette approche intuitive : « J'ai décidé d'expliquer <u>par l'exemple</u> ce que j'ai découvert » (p. 124, version française). Ces exemples apparaissent au §15, 16 et 17. Le paradoxe de St-Pétersbourg est décrit au §17. Comme il est très connu et exposé dans de nombreux manuels, nous le passons ici sous silence afin de nous concentrer sur les deux autres exemples plus concrets et largement moins connus. Ces deux exemples mettent en scène respectivement un marchand de St-Pétersbourg (Caïus, §15) et un rentier non localisé (Sempronius, §16). Afin de simplifier, nous allons présenter ces deux cas de façon unique et nous ferons référence au seul Sempronius ce qui va nous écarter du texte original sans en modifier la contribution fondamentale.

Sempronius doit faire transporter par mer des marchandises d'Amsterdam à St-Pétersbourg. La valeur de ces marchandises arrivées à destination est de 10.000 ducats et comme il y a un risque de naufrage dont la probabilité est de 0,10[2], Sempronius se demande s'il doit les assurer. Malheureusement pour lui il n'y a aucune offre d'assurance inférieure à 1600 ducats. Vu que ce prix lui parait très élevé, Sempronius s'interroge sur l'intérêt de souscrire un tel contrat et il le fait en des termes qui anticipent l'article de J. Mossin (1968) et le concept d'aversion absolue au risque décroissante !

Effrayé par le coût de l'assurance, Sempronius pense alors à une solution alternative qui consiste « à diviser les biens exposés à un certain risque plutôt que de le leur faire couvrir ensemble ». Bernoulli évoque ainsi la diversification comme alternative à l'assurance. Si Sempronius partage la cargaison sur deux bateaux qui suivent des routes indépendantes il remplace le risque initial $\tilde{X}$[3] :

$$\tilde{X} \bigcirc \begin{array}{l} \overset{0,10}{\nearrow}\ 0 \\ \underset{0,90}{\searrow}\ 10.000 \end{array} \qquad (1)$$

par le risque $\tilde{Y}$:

$$\tilde{Y} \bigcirc \begin{array}{l} \overset{0,01}{\nearrow}\ 0 \\ \longrightarrow\ 5.000 \\ \underset{0,81}{\searrow}\ 10.000 \end{array} \qquad (2)$$

Les loteries $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ ont même espérance mathématique ($E(\tilde{x}) = E(\tilde{y}) = 9000$)mais un individu riscophobe (dont l'utilité totale est concave) va préférer $\tilde{Y}$ à $\tilde{X}$. La diversification apparait donc bien comme une alternative à l'assurance pour se prémunir du risque.

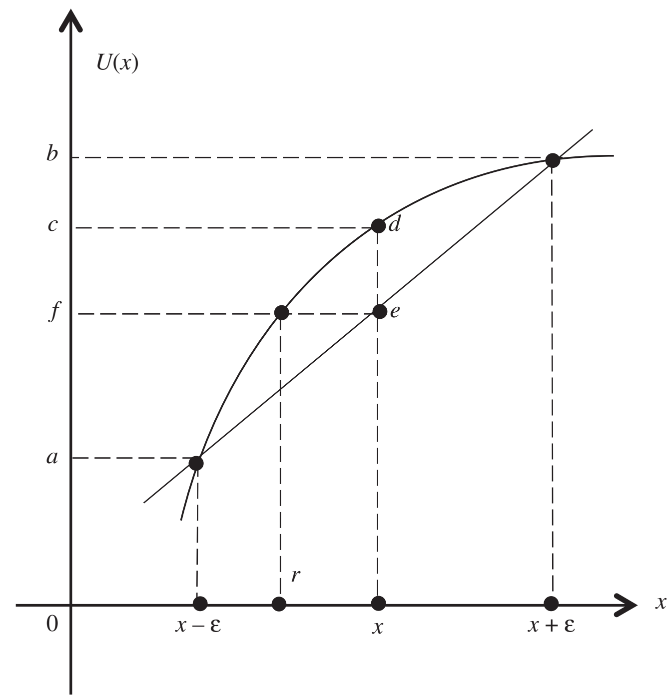
En outre Bernoulli prouve par cet exemple que la valeur d'une loterie ne peut pas être égale à son espérance mathématique pour un riscophobe. En effet la loterie $\tilde{Y}$ a plus de valeur que la loterie $\tilde{X}$ pour le décideur qui a une aversion au risque alors que les espérances mathématiques sont identiques. Ce résultat est encore aujourd'hui l'élément de base de la théorie économique du risque.

2.1 Friedman M. et Savage L. (1948, 1952)

Les deux articles de Friedman et Savage (1948, 1952) contiennent beaucoup d'éléments divers et intéressants. Vu notre objectif, nous n'en retenons qu'un car il va jouer un rôle important pour notre propos, même si pendant plusieurs décennies cet aspect des deux articles est resté largement méconnu.

Par rapport à l'article de Bernoulli ceux de Friedman et Savage (F.S. dans la suite) peuvent être interprétés comme représentant une étape intermédiaire avant la publication des articles de Arrow (1965) et Pratt (1964). Comme nous l'avons vu, Bernoulli a indiqué que pour un riscophobe la valeur d'une loterie est inférieure à son espérance mathématique. Il a ainsi indiqué une « direction » sans toutefois s'intéresser à l' « intensité » du phénomène. F.S. vont faire le premier pas dans cette voie en définissant le concept de « utility premium » (U. P.). Pour l'illustrer considérons un individu qui dispose d'une richesse x et d'une loterie binaire symétrique d'espérance nulle. Si sa fonction d'utilité $U(x)$ est croissante et concave, on représente la situation par un graphique bien connu à la figure 1.

FIGURE 1



Les niveaux de richesse $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$ sont ceux qui pourront être atteints après tirage de la loterie et ils donneront respectivement les utilités *Oa* ou *Ob*. L'espérance d'utilité avec la loterie est donc égale à *of* = *ex*.

Par contre si l'individu ne devait pas faire face à la loterie il disposerait d'une richesse x et son utilité serait $oc = dx$.

Puisque l'individu a peur du risque la loterie réduit son bien-être qui passe de dx (sans loterie) à ex (avec loterie). La « utility premium » correspond à la perte de bien-être impliquée par la loterie $\tilde{\varepsilon}$ et à la figure 1, elle est égale à la distance *de*.

La U.P. est bien une mesure d'intensité car plus la distance *de* est grande, plus la loterie est pénible pour l'individu.

Ce concept – qui va se révéler important (voir section 6) – a été largement ignoré car il ne permet pas des comparaisons entre deux individus différents[4]. Toutefois, comme nous le verrons, la U.P. peut être un instrument efficace lorsqu'on s'intéresse à un seul individu dont p. ex. le niveau de richesse se modifie.

3. ARROW, K. (1965) ET PRATT J.(1964)

Ces deux articles – et plus particulièrement celui de John Pratt – ont été fondamentaux pour le développement de notre discipline. En voici, parmi d'autres, trois raisons essentielles.

a) Arrow et Pratt (A.P.) ont remplacé la notion de « utility premium » de F.S. par celle de prime de risque (π) Celle-ci mesure le sacrifice monétaire qu'un décideur est prêt à accepter pour se débarrasser d'un risque $\tilde{\varepsilon}$ d'espérance nulle et maintenir son utilité totale constante.

À la figure 1 la prime de risque est mesurée par la distance *rx*. Comme la « utility premium », la prime de risque est une mesure d'intensité mais à la différence de la « utility premium » elle est comparable d'un individu à l'autre car elle est exprimée en unités monétaires.

b) Grâce à une formule d'approximation célèbre, A.P. ont montré que

$$\pi \approx \frac{\sum_{\varepsilon}^{2}}{2}\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)$$

où $\sum_{\varepsilon}^{2}$ = variance de $\tilde{\varepsilon}$

$-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ est le coefficient d'aversion absolue au risque évalué en une richesse x (voir par exemple Eeckhoudt-Gollier-Schlesinger (2005) pour plus de détails).

c) A.P. ont fait l'hypothèse que ce coefficient d'aversion au risque décroît quand x augmente (hypothèse « DARA » c'est-à-dire de « decreasing absolute risk aversion »). Cette hypothèse – utilisée quelques années plus tard par Mossin (1968) dans un article important en économie de l'assurance – va également ouvrir la voie aux développements évoqués à la section suivante.

4. DE L'AVERSION ABSOLUE AU RISQUE À LA NOTION DE PRUDENCE

Dans un article, consacré au phénomène d'épargne de précaution, Kimball (1990) introduit la notion, bien connue aujourd'hui, de prudence (P). Il la justifie notamment en argumentant que l'élément important pour un décideur est son utilité marginale. Il va alors définir la prime de prudence comme le sacrifice monétaire qu'un décideur est prêt à accepter pour se débarrasser d'un risque $\tilde{\varepsilon}$ et maintenir son utilité marginale constante. Utilisant la formule d'approximation de A.P. appliquée à l'utilité marginale (et non pas totale) il montre que

$$P \approx \frac{\sum_{\varepsilon}^{2}}{2}\left(-\frac{u'''(x)}{u''(x)}\right)$$

où $\left(-\frac{u'''(x)}{u''(x)}\right)$ est l'indice de prudence absolue.

Lorsque U''' (la dérivée troisième de U) est positive le décideur est prudent.

A partir de là, Kimball présente notamment les deux résultats suivants :

a) si l'indice de prudence absolue augmente l'individu est plus enclin à accumuler de l'épargne de précaution;

b) si un individu s'enrichit, toutes choses égales d'ailleurs, son indice de prudence absolue diminue. C'est l'hypothèse de « decreasing absolute prudence » (D.A.P.) qui, combinée à celle de Arrow-Pratt, relative à la décroissance de l'aversion absolue, va conduire à plusieurs développements très récents.

En effet les travaux de Kimball ont donné lieu à des extensions relatives aux notions de « standardness », « properness » et « risk vulnerability » de la fonction d'utilité qui sont décrites de façon synthetique dans Gollier (2001, pp. 130-139).

5. ROTHSCHILD, M – STIGLITZ, J. (1970-1971)

A première vue il ne devrait exister aucun lien entre la contribution de Bernoulli et celles de Rothschild – Stiglitz (R.S.). En effet, le caractère intuitif du texte de Bernoulli est très éloigné de l'approche très technique de R.S. Cependant, en dépit de cette différence, les deux contributions se rejoignent et le travail de R.S. peut être interprété comme une généralisation de celui de Bernoulli.

En effet R-S définissent la notion de « changement de risque à moyenne constante ». Celui-ci peut se produire de deux manières :

(i) soit par l'ajout d'un bruit blanc ($E\tilde{\varepsilon}|x) = 0$ pour tout x) à au moins un des résultats de la loterie initial;

(ii) soit par un transfert de poids des extrémités vers le milieu d'une distribution tout en maintenant son espérance constante.

R.S. montrent ensuite

- qu'en dépit de leur expression différente ces deux définitions sont fondamentalement identiques;
- que dans le modèle d'espérance d'utilité tous les riscophobes vont rejeter un accroissement de risque à moyenne constante.

Ces résultats[5] sont aujourd'hui bien connus et ils sont devenus un élément de base de tout cours en économie de risque. Il faut toutefois remarquer qu'ils sont « seulement » une généralisation du résultat de Bernoulli.

En effet, si nous retournons aux loteries (1) et (2) nous pouvons remarquer :

(i) que $\tilde{Y}$ est obtenue de $\tilde{X}$ en transférant du poids (de la probabilité) des extrêmes (0,09 de 0 et 0,09 de 10000) vers le milieu où on obtient 5000 avec une probabilité (un poids) de 0,18;

(ii) que l'on peut obtenir la loterie $\tilde{Y}$ en divisant les résultats de $\tilde{X}$ par 2 afin de générer $\tilde{X}_1$ avec

$$\tilde{X}_1 : \bigcirc \begin{array}{l} \nearrow^{0{,}10}\ 0 \\ \searrow_{0{,}90}\ 5.000 \end{array} \qquad (3)$$

et en ajoutant à $\tilde{X}_1$, un nouveau tirage de cette loterie indépendant du premier.

S'ils ne représentent en fait qu'une généralisation de l'intuition de Bernoulli, les résultats de R.S. ont néanmoins eu une grande importance car les changements du risque peuvent prendre des formes multiples dont la diversification ne représente qu'une version très particulière. Ils ont en outre aidé à montrer que la variance n'est pas un indicateur parfait de la quantité de risque, même si elle en représente une bonne première approximation.

Grâce à la contribution de R.S. la théorie du risque a pu s'appliquer à une foule de problèmes en micro-économie, finance et gestion des risques et il est impossible de répertorier tous les articles qui ont fait référence à cette notion très générale.

En outre, comme nous le montrerons à la section suivante, l'approche de R.S. a permis des extensions « aux ordres supérieurs »[6] qui n'auraient pas été possibles si on s'était arrêté au concept de diversification.

6. LES EXTENSIONS DE ROTHSCHILD ET STIGLITZ

De la même manière que les articles de R.S. faisaient écho à celui de Bernoulli, les extensions issues de R-S se sont appuyées – parfois inconsciemment – sur ceux de Friedman-Savage.

De façon curieuse les deux premières extensions ont été publiées la même année dans deux revues différentes et de façon indépendante par Menezes-Geiss-Tressler (1980) d'une part et Ekern (1980) d'autre part.

L'article de Menezes et al s'intéresse au signe de la dérivée troisième U''' de la fonction d'utilité. Les auteurs montrent que si U''' est positive le décideur n'apprécie pas un « downside risk increase ». Si un individu fait face à un risque initial et s'il doit accepter en outre un risque d'espérance nulle indépendant du premier (ce qu'il n'apprécie pas) il souhaitera (à probabilité identique) affecter ce nouveau risque parmi les meilleurs résultats de la loterie initiale plutôt qu'au sein des moins bons. En quelque sorte par une meilleure localisation du risque additionnel le décideur parvient à en réduire les effets négatifs si la dérivée troisième de U est positive.

En comparant des distributions qui ont même espérance et variance, Menezes et al (1980) ont mis en évidence le fait que un « downside risk increase » allait augmenter la dissymétrie à gauche, et que ce changement ne serait pas apprécié par des individus prudents $U''' > 0$** [7].

Comme nous le montrons dans la note en bas de page, Menezes et al étendent ainsi à l'ordre 3 ce que R-S. avaient établi à l'ordre 2.

La même année (1980), Ekern va généraliser le résultat de Menezes et al en l'étendant à un ordre n quelconque et il définit la notion *d'*« accroissement de risque à l'ordre n ». En suivant une démarche plus technique (et moins intuitive) que celle de Menezes et al, il établit le résultat suivant : si deux variables aléatoires ont leurs $n - 1$ premiers moments égaux, un accroissement de risque à l'ordre n va réduire le bien-être du décideur si et seulement si la dérivée n$^{\text{ème}}$ de la fonction d'utilité a le signe de $(-1)^{n-1}$.

Beaucoup plus tard, Eeckhoudt-Schlesinger (2006) et Eeckhoudt-Schlesinger-Tsetlin (2009) vont en quelque sorte fusionner les résultats de Menezes et al et de Ekern. D'une part, en utilisant l'idée que les décideurs souhaitent « combiner le bon et le mauvais »[8] et d'autre part en généralisant la notion de « utility premium » de F.S., ils parviennent à justifier intuitivement l'attitude vis-à-vis des accroissements de risque de n'importe quel ordre.

Comme cette littérature est récente, il est difficile de prédire l'impact qu'elle pourra avoir dans le cadre plus général de la théorie économique du risque. Néanmoins elle a déjà donné lieu à des premiers développements surtout dans le domaine de l'économie expérimentale.

7. CONCLUSION

Initié – « involontairement » – par Bernoulli en 1738, le modèle d'espérance d'utilité a connu de nombreux développements. Certains ont été évoqués ici en tentant de mettre en évidence les liens et les complémentarités qui les unissent.

Même si elle est restée largement inconnue avant les traductions en anglais (1954) et en français (1997), la contribution initiale de Bernoulli apparait comme fondatrice car elle a – dès le début – évoqué de façon simple et intuitive des questions encore débattues aujourd'hui avec une approche beaucoup plus technique.

Références

Arrow, K. (1965), "Essays in the theory of risk bearing". Yrjo Jahnsson Lecture Notes, Helsinki.

Bernoulli, D. (1738), "Specimen theoriae novae de mensura sortis", Traduit en français sous le titre : Exposé d'une nouvelle théorie de la mesure du risque, Risques 1997, No 31,123-136.

Borch, K. (1990), "Economics of Insurance", Advanced Textbooks in Economics 29, (Eds. : Knut K. Aase and Agnar Sandmo), North Holland.

Eeckhoudt, L., Schlesinger, H. (2006), "Putting risk in its proper place", American Economic Review, 96, 280-289.

Eeckhoudt, L., Gollier, C., Schlesinger, H. (2005), "Economic and Financial Decisions Under Risk" Princeton University Press.

Eeckhoudt, L., Schlesinger, H., Tsetlin, I. (2009), "Apportioning of Risk via Stochastic Dominance", Journal of Economic Theory, 144, 994-1003.

Ekern, S. (1980), "Increasing nth degree risk", Economics Letters, 6, 329-333.

Friedman M., Savage, L.J. (1948), "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", Journal of Political Economy, 4, 270-304.

Friedman, M., Savage, L.J. (1952), "The expected-utility hypothesis and the measurability of utility", Journal of Political Economy, 60, 463-474.

Gollier, C. (2001), "The Economics of Risk and Time", MIT Press.

Kimball, M.S. (1990), "Precautionary Saving in the Small and in the Large", Econometrica, 58, 53-57.

Menezes, C., Geiss, C. and Tressler Menezes, J. (1980), "Increasing downside risk", American Economic Review, 70, 921-932.

Mossin, J. (1968), "Aspects of Rational Insurance Purchasing", Journal of Political Economy, 76, 553-568.

Pratt, J. (1964), "Risk aversion in the small and in the large", Econometrica, 32, 122-136.

Rothschild, M. – Stiglitz, J. (1970), "Increasing Risk I : a Definition", Journal of Economic Theory, 2, 225-243.

Rothschild, M., Stiglitz, J., (1971), "Increasing Risk II : Its Economic Consequences", Journal of Economic Theory, 3, 66-84.

Notes

1. L'article rédigé en latin a été traduit en anglais dans Econometrica en 1954 et en français dans la revue Risques (1997). Les développements auxquels l'article a donné lieu au 19ème siècle et dans la première moitié du 20ème sont évoqués par K. Borch (1990).

2. Dans l'article de Bernoulli, en même temps que le changement dans les noms, il y a aussi une variation dans la probabilité du naufrage maritime qui d'un exemple à l'autre passe de 0,05 à 0,10.

3. Dans la loterie $\widetilde{X}$ les conséquences (0 et 10.000) représentent la valeur des marchandises à destination en fonction des États du monde dont les probabilités sont respectivement 0,10 et 0,90.

4. Comme dans le modèle d'espérance d'utilité, l'utilité est définie à une transformation linéaire près, il n'est pas possible de comparer l'utilité de deux individus.

5. Plus de détails au sujet de ces résultats peuvent être trouvés dans Eeckhoudt-Gollier-Schlesinger (2005).

6. Les notions d'aversion au risque (concavité de l'utilité) ou de changement du risque sont des notions dites du « deuxième ordre » car elles font référence à la dérivée seconde de l'utilité ou à la variance.

7. Il est intéressant de remarquer le parallélisme avec le résultat de R.S. qui compare des distributions qui ont la même espérance et qui met en évidence le fait qu'un accroissement de risque (ce qui augmente la variance) n'est pas apprécié par un individu riscophobe.

8. Il est aisé de montrer que cette attitude correspond à une aversion pour la corrélation positive entre des risques, une idée fondamentale en finance et en assurance.