

Les bandes de Bollinger comme technique de réduction de la variance des prix d'options sur obligations obtenus par la simulation de Monte-Carlo

Raymond Théoret and Pierre Rostan

Volume 81, Number 4, décembre 2005

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/014914ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/014914ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Théoret, R. & Rostan, P. (2005). Les bandes de Bollinger comme technique de réduction de la variance des prix d'options sur obligations obtenus par la simulation de Monte-Carlo. *L'Actualité économique*, 81(4), 693–724. <https://doi.org/10.7202/014914ar>

Article abstract

In this paper, we propose a new variance reduction technique to speed up the convergence during a Monte-Carlo simulation : Bollinger Bands. Beside being used in technical analysis, we show how Bollinger Bands can filter the extreme variations appearing during a simulation. We apply this technique in conjunction with the Fong and Vasicek model to price bond options (OBK) traded at the Montreal Exchange. The MSE is drastically reduced when adding Bollinger Bands to the simulation. In addition, the Fong and Vasicek model in conjunction with the Bollinger Band-based technique performs very well compared to the Black, Derman and Toy model, a widespread model among professionals.

LES BANDES DE BOLLINGER COMME TECHNIQUE DE RÉDUCTION DE LA VARIANCE DES PRIX D'OPTIONS SUR OBLIGATIONS OBTENUS PAR LA SIMULATION DE MONTE-CARLO*

Raymond THÉORET

*École des sciences de la gestion
Université du Québec à Montréal*

Pierre ROSTAN

*Audencia, École de management
Nantes*

RÉSUMÉ – Dans cet article, nous proposons une nouvelle technique de réduction de la variance d'une simulation : les bandes de Bollinger. Nous montrons comment le recours aux bandes de Bollinger, une procédure utilisée en analyse technique, peut accroître considérablement la performance d'une simulation de Monte-Carlo en termes de réduction de la variance des simulations. La technique des bandes de Bollinger sert à filtrer les variations extrêmes qui s'observent dans une simulation. Nous appliquons cette technique à la simulation des prix de 38 options sur obligations (OBK) transigées à la Bourse de Montréal, ce en tirant profit du modèle de Fong et Vasicek pour simuler les prix des options. L'erreur quadratique moyenne des simulations se voit réduite considérablement à la suite de l'utilisation des bandes de Bollinger. Le modèle de Fong et Vasicek renforcé par les bandes de Bollinger se compare également très favorablement à celui de Black, Derman et Toy, soit le modèle encore le plus utilisé dans la pratique financière pour évaluer les options sur taux d'intérêt et sur obligations.

* Les auteurs tiennent à remercier tout particulièrement le professeur Jean-Pierre Château (ESC-Rouen) pour ses très nombreuses suggestions sur des versions préliminaires de cet article. Ils remercient également les professeurs Paul André (HEC, Montréal), Alain Coën (UQAM), René Ferland (UQAM), Alain Guay (UQAM), Jean-Guy Loranger (Université de Montréal) et Lassana Maguiraga (UQAM) pour avoir commenté des versions préliminaires de cet article ou pour avoir prodigué des conseils utiles et notamment François-Éric Racicot (UQO) pour ses conseils sur les aspects économétriques et numériques de notre contribution. Nous remercions finalement M. Léon Bitton, vice-président à la Bourse de Montréal. Toute erreur ou omission demeure cependant sous la responsabilité des auteurs.

ABSTRACT – In this paper, we propose a new variance reduction technique to speed up the convergence during a Monte-Carlo simulation : Bollinger Bands. Beside being used in technical analysis, we show how Bollinger Bands can filter the extreme variations appearing during a simulation. We apply this technique in conjunction with the Fong and Vasicek model to price bond options (OBK) traded at the Montreal Exchange. The MSE is drastically reduced when adding Bollinger Bands to the simulation. In addition, the Fong and Vasicek model in conjunction with the Bollinger Band-based technique performs very well compared to the Black, Derman and Toy model, a widespread model among professionals.

INTRODUCTION

Peu d'articles ont été consacrés jusqu'ici à la performance empirique des modèles d'évaluation d'options sur taux d'intérêt. Dietrich-Campbell et Schwartz (1986) évaluent des options sur des bons du Trésor et des obligations fédérales américaines en recourant au modèle bifactoriel de Brennan et Schwartz (1982). Flesaker (1993) et Amin et Morton (1994) présentent des études empiriques du modèle de Heath, Jarrow et Morton (1992) en utilisant, comme base de données, les options sur les eurodollars à terme. Buhler *et al.* (1999) ont cherché à décrypter les meilleures options sur taux d'intérêt pour la gestion du risque de taux d'intérêt.

C'est dans le but de pallier cette pénurie d'études sur les options sur taux d'intérêt que nous étudierons dans cet article la performance relative du modèle de Fong et Vasicek (1992) en regard du modèle de Black, Derman et Toy (1990). Le modèle de Black, Derman et Toy est sans contredit celui qui est le plus utilisé dans la pratique pour évaluer les options sur taux d'intérêt, cela sans doute à cause de la facilité de sa mise en œuvre¹. Cependant, il reste limité par la méthode numérique employée, soit le treillis binomial, et par le fait que la modélisation de la volatilité des taux d'intérêt s'avère somme toute assez sommaire dans le cadre de ce modèle. Par ailleurs, le modèle de Fong et Vasicek, un modèle bifactoriel, modélise simultanément les trajectoires des taux d'intérêt et de la variance, cela dans le cadre de la simulation de Monte-Carlo, ce qui lui confère *a priori* beaucoup plus de flexibilité que le modèle de Black, Derman et Toy. Dans cet article, nous comparons ces deux modèles en faisant appel à une banque de données négligée jusqu'ici, soit celle des options sur taux d'intérêt transigées à la Bourse de Montréal.

Les simulations de Monte-Carlo que nous effectuerons pour calculer les prix d'options sur taux d'intérêt dans le cadre du modèle de Fong et Vasicek se ramènent à évaluer des espérances conditionnelles. Or, si la simulation de Monte-Carlo n'est pas balisée, il faut envisager, pour calculer de telles espérances, une infinité de trajectoires de taux d'intérêt. Un grand nombre d'entre elles ne sont pas plausibles ou ne présentent aucun intérêt dans le cadre de ces calculs. Une

1. Un autre modèle très utilisé dans la pratique est la formule analytique de Black (1976) ayant trait aux options sur taux d'intérêt. Certaines options sur taux d'intérêt sont même cotées par rapport à leur volatilité implicite dans le modèle de Black.

simulation de Monte-Carlo se révèle donc très inefficace si elle n'est pas renforcée par des techniques de réduction de la variance. Parmi ces techniques, celles des variables antithétiques et des variables de contrôle sont les plus connues². Dans cet article, nous proposons une nouvelle technique de réduction de la variance qui fait appel à un outil très utilisé en analyse technique : les bandes de Bollinger. Celles-ci comportent une bande moyenne, soit une moyenne mobile sur les prix d'un titre, et deux autres bandes, l'une supérieure, l'autre inférieure, espacées à un nombre prédéterminé d'écart-types de la bande moyenne, ces écart-types étant calculés sur les données qui constituent la moyenne mobile. Les bandes inférieure et supérieure se rapprochent donc quand la volatilité des prix diminue et s'élargissent quand la volatilité des prix augmente. Cela permet de limiter la volatilité excessive et indésirable des taux d'intérêt lors des simulations et de n'envisager que les trajectoires qui sont pertinentes ou plausibles pour le calcul de l'espérance conditionnelle.

Nous faisons appel aux bandes de Bollinger pour construire une variable antithétique qui dispose d'une mémoire intégrée. Selon notre technique, une variable aléatoire faisant partie d'une trajectoire et qui frappe les bandes inférieure ou supérieure est forcée de retourner à l'intérieur des bandes. Notre technique dispose donc d'un avantage sur celle des variables antithétiques « classiques » en ce sens qu'elle incorpore l'information sur l'évolution de la volatilité de la variable simulée.

Pour illustrer la puissance de notre technique, nous l'appliquons d'abord à la simulation du taux d'intérêt des obligations du gouvernement fédéral canadien à 10 ans puis à la détermination des prix de 38 options américaines OBK, d'achat ou de vente, négociées à la Bourse de Montréal et dont le *sous-jacent* est l'obligation fédérale canadienne à 10 ans. Avec l'aide de notre technique de réduction de la variance, nous avons réussi à réduire l'amplitude des trajectoires simulées des taux d'intérêt des obligations fédérales dans un intervalle reflétant la volatilité de la série. Sans le recours à cette technique de réduction de la variance, les trajectoires simulées des taux obligataires présentent des fluctuations atypiques qui sont étrangères à la série observée.

L'évaluation des prix des options sur obligations est basée sur des simulations de Monte-Carlo dans le contexte du modèle de Fong et Vasicek (1992)³. Nous montrons que la technique de réduction de la variance que nous proposons améliore substantiellement la puissance du modèle de Fong et Vasicek en matière de détermination de prix d'options, cela après comparaison des erreurs quadratiques moyennes calculées en recourant aux prix observés et simulés. Nous comparons

2. On peut aussi nommer les méthodes pour améliorer l'échantillonnage aléatoire, soit les nombres à faible divergence ou séquences déterministes (Halton, Sobol, Faure), les techniques de ponts browniens, l'échantillonnage dit de l'hypercube latin et la technique de l'appariement des moments.

3. Pour la mise en application du modèle de Fong et Vasicek, voir Rostan et Théoret (2002a, b).

également le modèle de Fong et Vasicek renforcé par les bandes de Bollinger au modèle de Black, Derman et Toy (1990) comme nous l'avons mentionné ci-devant. Encore là, le modèle de Fong et Vasicek se révèle préférable pour déterminer les prix d'options à court terme.

Selon James et Webber (2000)⁴, la mise en oeuvre de la simulation de Monte-Carlo requiert des méthodes efficaces qui accélèrent la simulation tout en générant des sentiers de prix pertinents. Nous croyons que notre méthode, basée sur les bandes de Bollinger, satisfait à ces deux conditions d'une bonne simulation. Celle-ci partage la facilité de mise en oeuvre de la technique des variables anti-thétiques tout en lui conférant une mémoire intégrée qui découle des séries temporelles observées. Notre technique pourrait donc être adaptée pour effectuer des prévisions de taux d'intérêt et non seulement des simulations de ceux-ci comme nous le faisons dans le cadre de cet article.

1. LES ASPECTS EMPIRIQUES DE LA SIMULATION DU PRIX D'UNE OPTION SUR OBLIGATION

Notre objectif n'est pas dans cette section d'effectuer une revue de la littérature ayant trait à la détermination des prix d'options sur obligations⁵. Nous voulons plutôt rendre compte des étapes que nous avons suivies pour déterminer les prix des options qui nous intéressent dans cet article, soit les options américaines sur obligations négociées à la Bourse de Montréal.

Les quatre étapes d'une simulation de Monte-Carlo du prix d'une option sur obligation sont les suivantes : i) tracer les sentiers de taux d'intérêt, soit le *sous-jacent* de l'obligation; ii) tracer, pour chacun de ces sentiers, l'évolution du prix de l'obligation *sous-jacente* à l'option; iii) évaluer les flux monétaires de l'option à son échéance à partir des prix obligataires calculés à l'étape précédente; iv) actualiser les flux monétaires de l'option jusqu'à la date actuelle si l'option est européenne : la moyenne de ces flux monétaires actualisés constitue le prix de l'option. Si l'option est américaine, comme cela est le cas dans cet article, il faut de plus déterminer la date d'exercice optimal pour chacun des sentiers de prix suivis par le prix de l'obligation.

Une simulation de Monte-Carlo ayant trait au prix d'une option sur obligation s'enclenche donc par la détermination des trajectoires de taux d'intérêt qui servent à calculer les prix des obligations. Dans le modèle de Fong et Vasicek (1992), qui sert de base à nos simulations, le taux d'intérêt instantané suit un processus Ornstein-Uhlenbeck, soit un processus de retour vers la moyenne. De plus, la volatilité du taux d'intérêt, une partie intégrante de ce processus, est une variable endogène lors de la simulation, obéissant elle-même à un processus de retour vers la moyenne. Le modèle de Fong et Vasicek est donc bifactoriel, l'équation de la variance servant à mieux configurer la structure à terme des taux d'intérêt.

4. James et Webber (2000), p. 347.

5. Pour d'excellentes synthèses des modèles de détermination des prix d'options sur obligations, on consultera Rebonato (1998) ainsi que James et Webber (2000).

L'équation du taux d'intérêt instantané prend la forme suivante dans le modèle de Fong et Vasicek (1992) :

$$dr = \alpha(\bar{r} - r) dt + \sqrt{v} dz_1 \quad (1)$$

avec

r : taux d'intérêt instantané;

\bar{r} : moyenne à long terme du taux d'intérêt;

v : variance du taux d'intérêt;

\bar{v} : variance à long terme du taux d'intérêt;

dt : intervalle de temps;

$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$, où $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Par ailleurs, la variance⁶ du taux d'intérêt est représentée comme suit dans le modèle de Fong et Vasicek :

$$dv = \gamma(\bar{v} - v) dt + \xi \sqrt{v} dz_2 \quad (2)$$

Certes, avant d'amorcer la simulation des équations (1) et (2), celles-ci doivent être calibrées, c'est-à-dire que les paramètres α , γ , ξ de même que \bar{r} et \bar{v} doivent être estimés. Nous aurions pu recourir à la méthode des moments généralisés (GMM) pour y arriver mais nous avons plutôt fait appel à une méthode plus robuste : la méthode des moments simulés. Celle-ci a été développée par McFadden (1989). Dans le cadre de notre modèle, elle consiste à minimiser l'écart : $[\theta - \theta']$. Précisons les composantes de ce vecteur. θ est un vecteur de dimension (4x1) qui renferme les quatre moments d'une fonction polynomiale d'ajustement, soit un polynôme du troisième degré qui épouse le profil de la structure à terme des taux d'intérêt observés; θ' est pour sa part un vecteur de dimension (4x1) des quatre moments de la structure à terme simulée à partir du modèle de Fong et Vasicek (1992). Nous avons simulé les moments en écrivant un programme approprié dans le logiciel Matlab.

Pour simuler les taux d'intérêt, on se sert donc des équations (1) et (2) dans le modèle de Fong et Vasicek (1992). À chaque pas d'une trajectoire, la variance simulée s'incorpore immédiatement dans l'équation du taux d'intérêt. On admet généralement que les deux processus de Wiener représentés par dz_1 et dz_2 dans les équations (1) et (2) sont corrélés et l'on se sert de la factorisation de Cholesky pour établir cette corrélation lors de la simulation, corrélation dont le niveau est

6. Dans une simulation du prix d'une obligation, il serait déraisonnable de supposer la variance du taux d'intérêt fixe lors de la simulation puisque l'on sait que la variance du taux d'intérêt d'une obligation diminue au fur et à mesure qu'elle se rapproche de son échéance, toutes choses égales par ailleurs.

établi à partir des données observées. Certes, pour accroître l'efficacité de cette simulation de Monte-Carlo, il faut recourir à des techniques de réduction de la variance, les plus connues étant celles constituées par les variables antithétiques et les variables de contrôle. L'objet de cet article est de proposer une nouvelle technique de réduction de la variance qui tire profit des bandes de Bollinger, bien connues en analyse technique et dont nous préciserons le calcul ultérieurement.

À partir de chacune des trajectoires de taux d'intérêt qui viennent d'être établies, il faut calculer le prix de l'obligation à la fin de chacune d'elles de manière à déterminer le flux monétaire correspondant de l'option. Pour ce faire, nous recourons à l'équation différentielle suivante du prix d'une obligation à coupon zéro, dont la forme générale, bien connue, est transposée au contexte du modèle de Fong et Vasicek (1992) :

$$\begin{aligned}
 &P_t + (\alpha \bar{r} - \alpha r + \lambda v) P_r \\
 &+ (\gamma \bar{v} - (\gamma + \xi \eta) v) P_v + \frac{1}{2} v P_{rr} + P \xi v P_{rv} \\
 &+ \frac{1}{2} \xi^2 v P_{vv} - r P = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Deux paramètres nous sont inconnus dans l'équation différentielle (3) du prix de l'obligation, soit λ et η . Ils représentent respectivement les prix du risque associés au taux d'intérêt (r) et à sa variance (v), soit les deux facteurs de risque dans le modèle de Fong et Vasicek. Il est à noter que le prix du risque relié au prix de l'action disparaît de l'équation différentielle de Black et Scholes car le *sous-jacent* de l'option d'achat européenne, soit l'action, est négocié sur un marché. Mais tel n'est pas le cas pour une obligation dont le *sous-jacent*, soit le taux d'intérêt, ne représente pas un « actif négociable »⁷. Les prix du risque sont certes difficiles à estimer, mais pour y arriver nous avons établi quelques critères basés sur des considérations empiriques, ainsi : i) ils doivent se situer dans l'intervalle $[0,1]$. (Dans leur étude, Clewlow et Strickland, 1997 ont fixé arbitrairement les valeurs de λ et de η à 0,20 et 0,10, respectivement.); ii) ils doivent également être choisis de telle sorte que les flux monétaires simulés de l'option ne soient pas des nombres complexes.

L'équation (3) admet une solution analytique qui est de la forme suivante :

$$P(t, s, r, v) = e^{-rD(\tau) + vF(\tau) + G(\tau)} \tag{4}$$

7. *Tradable asset*, en anglais.

avec

t et s désignant respectivement la date d'observation du prix de l'obligation et son échéance;

$D(\tau)$: la durée de l'obligation, égale à $D(\tau) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\tau})$;

$F(\tau)$, une équation Ricatti qui se réduit à $F(\tau) = -\frac{2}{\xi^2} \frac{H'(\tau)}{H(\tau)}$;

où $H(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 \int_t^s F(u)du\right)$;

$G(\tau) = \bar{r}(D(\tau) - \tau) - \frac{2\lambda\bar{v}}{\xi^2} \ln H(\tau)$.

La dérivation de l'équation (4) en termes des séries de Selby et Strickland (1995) apparaît à l'annexe A-1. Nous avons programmé cette fonction dans le logiciel Matlab. Si l'obligation comporte des coupons, comme c'est le cas pour les obligations à 10 ans qui sont retenues dans cette étude pour tester le modèle de Fong et Vasicek, chacun de ces coupons est considéré comme une obligation à coupon zéro. Il va sans dire que la présence de coupons complique de beaucoup l'exercice de simulation du prix de l'obligation puisque l'obligation de 10 ans en comportait 18 restants dans le cas qui nous intéresse.

Pour chaque trajectoire de taux d'intérêt, on obtient donc un prix correspondant pour l'obligation à l'échéance de l'option, disons $P^j(T)$, l'indice j désignant une trajectoire particulière et T , l'échéance de l'option. Si l'option analysée est une option d'achat, son flux monétaire correspondant est de : $(P^j(T) - X)^+$, où X désigne le prix d'exercice. Si ladite option d'achat est européenne, sa valeur C_0 est alors de :

$$C_0 = E^Q \left[e^{-\int_0^T r_s ds} (P(T) - X)^+ \right] \quad (5)$$

où E^Q désigne l'opérateur d'espérance dans un univers neutre au risque. Pour la trajectoire j , le flux monétaire actualisé est de $e^{-\int_0^T r_s ds} (P^j(T) - X)^+ = FM_a^j$, où FM_a^j désigne le flux monétaire actualisé de l'option pour la trajectoire j . Disons que l'on ait simulé M trajectoires. En conformité avec l'équation (5), le prix de l'option est alors de :

$$C_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M FM_a^j \quad (6)$$

Si l'option est américaine comme c'est le cas dans cet article, il faut appliquer la règle de l'exercice optimal à chaque trajectoire⁸. Celle-ci est représentée par une variante de l'équation de Bellman, bien connue en programmation dynamique :

$$C(t_n) = \max[\Pi(t_n), \Phi(t_n)] \quad (7)$$

avec $\Pi(t_n)$ représentant le flux monétaire résultant de l'exercice de l'option à l'instant t_n de la trajectoire et $\Phi(t_n)$, la valeur de continuation de l'option. Pour implanter cette règle, nous avons recouru à la technique de l'anticipation parfaite présentée dans les articles de Boyle, Broadie et Glasserman (1997) et d'Andersen et Broadie (2001)⁹. Certes, cette méthode comporte un biais positif mais les bandes de Bollinger agissent en soi comme catalyseur dans la convergence des prix simulés vers les prix observés, comme nous le verrons ultérieurement. Dans un article subséquent, nous envisagerons d'autres procédures pour implanter la règle d'exercice.

2. MÉTHODOLOGIE

2.1 Aperçu de la méthodologie

Les bandes de Bollinger sont un outil très utilisé en analyse technique. Ces bandes de fluctuation mesurent l'intensité des transactions sur un titre en évoluant au diapason de la volatilité des rendements du titre plutôt que de représenter des intervalles fixes¹⁰. Elles aident à identifier les intervalles de transaction ainsi que les seuils de support et de résistance, cela particulièrement quand la variation du

8. L'option américaine comporte une option d'exercice prématuré, ce qui n'est pas le cas pour l'option européenne. Le prix d'une option américaine est égal à : $P = \max_{\tau} E^Q [e^{-r\tau} h(S_{\tau})]$, où $h(S_{\tau})$ est le flux monétaire de l'option au temps τ dans l'état S_{τ} advenant l'exercice et où le maximum est calculé pour tous les temps d'arrêt dans l'intervalle $\tau \leq T$. Un algorithme évident pour estimer P est de générer un sentier aléatoire pour S_{τ} , pour i variant de 0 à d , et d'établir l'estimé suivant pour le flux monétaire actualisé de ce sentier : $\hat{P} = \text{Max}_{i=0 \dots d} [e^{-r_i} h(S_{\tau_i})]$. L'hypothèse implicite derrière cet estimateur est l'anticipation parfaite. Il comporte donc un biais positif. Ce biais décroît en augmentant le nombre de simulations et en faisant appel aux diverses techniques de réduction de la variance. Incidemment, la simulation de Monte-Carlo fournit toujours des estimateurs biaisés. Tilley (1993) a été le premier à envisager l'évaluation d'une option américaine par la simulation de Monte-Carlo. Par la suite, le recours à l'économétrie a pu rendre la simulation de Monte-Carlo plus flexible en matière d'estimation d'options américaines. Longstaff et Schwartz (2001) ont trouvé une borne inférieure au prix d'une option américaine en incorporant la régression des moindres carrés ordinaires dans une simulation de Monte-Carlo pour estimer l'espérance conditionnelle des flux monétaires (*payoffs*) d'une option américaine. Leur estimateur comporte un biais négatif mais est convergent. Andersen et Broadie (2001) ont établi une borne supérieure pour la valeur estimée du prix de l'option américaine découlant d'une simulation de Monte-Carlo. Broadie et Glasserman (1997) ont construit un intervalle de confiance pour le prix d'une option américaine en se basant sur la technique de l'échantillonnage aléatoire.

9. En fait, notre estimation du prix de l'option américaine correspond à la borne supérieure du modèle d'Andersen et Broadie (2001). Cette borne supérieure du prix de l'option est égale à sa borne inférieure à laquelle s'ajoute une option du type *lookback*. Au dire même d'Andersen et Broadie : « *the perfect foresight nature of lookbacks can make these options quite expensive* ». Mais des techniques de réduction de la variance peuvent pallier ce problème. Voir Andersen et Broadie (2001), p. 7.

10. Voir le manuel de référence de Bloomberg à la section ayant trait aux bandes de Bollinger.

prix du titre s'avère importante. Pour établir l'intervalle de fluctuation du prix d'un titre, la plupart des analystes recourent à deux écarts-types pour le construire, ce qui signifie, statistiquement parlant, que le prix du titre se maintiendra dans cet intervalle 95 % du temps¹¹.

Si l'on se réfère aux prix de clôture (pc) d'un titre, la bande de Bollinger mitoyenne pour le jour n , soit une moyenne mobile définie disons sur n jours, est la suivante :

$$\text{bande mitoyenne} = \frac{\sum_{j=1}^n pc_j}{n} . \quad (8)$$

La bande de Bollinger supérieure est pour sa part égale à :

$$\text{bande supérieure} = \text{bande mitoyenne} + \left[\alpha \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (pc_j - \text{bande mitoyenne})^2}{n}} \right] \quad (9)$$

où α représente le nombre d'écarts-types retenu pour construire la bande. La bande de Bollinger inférieure se définit certes en regard de la borne supérieure :

$$\text{bande supérieure} = \text{bande mitoyenne} - \left[\alpha \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (pc_j - \text{bande mitoyenne})^2}{n}} \right] . \quad (10)$$

Dans cet article, nous utilisons une moyenne mobile de 100 jours pour construire nos bandes de Bollinger, cela tout simplement parce que cette moyenne donne de bons résultats. L'intervalle compris entre les bandes de Bollinger se rétrécit durant les périodes de moindre volatilité des prix et s'agrandit durant ces périodes de volatilité plus élevée.

Pour bien visualiser la technique de réduction de la variance proposée dans cet article, nous avons simulé, dans un premier temps, le taux d'intérêt des obligations fédérales canadiennes à 10 ans sans recourir aux bandes de Bollinger. Nous avons décrit dans deux documents de recherche le calibrage des équations (1) et (2) qui sont utilisées pour les fins de cette simulation¹². Pour estimer les paramètres des équations (1) et (2), nous avons utilisé, comme nous l'avons mentionné auparavant, la méthode des moments simulés. Pour estimer la variance

11. On postule ici une distribution normale.

12. Pour plus de détails à ce sujet, voir Rostan et Théoret (2002a, b).

initiale du taux d'intérêt, nous nous sommes servis d'un processus GARCH(1,1)¹³. Les résultats de l'estimation des paramètres des équations (1) et (2) apparaissent au tableau 1.

TABLEAU 1
CALIBRAGE DU MODÈLE DE FONG ET VASICEK

Paramètre	Estimé
α	1,8003
\bar{r}	0,0645
γ	2,4052
\bar{v}	0,0035
ξ	0,00096

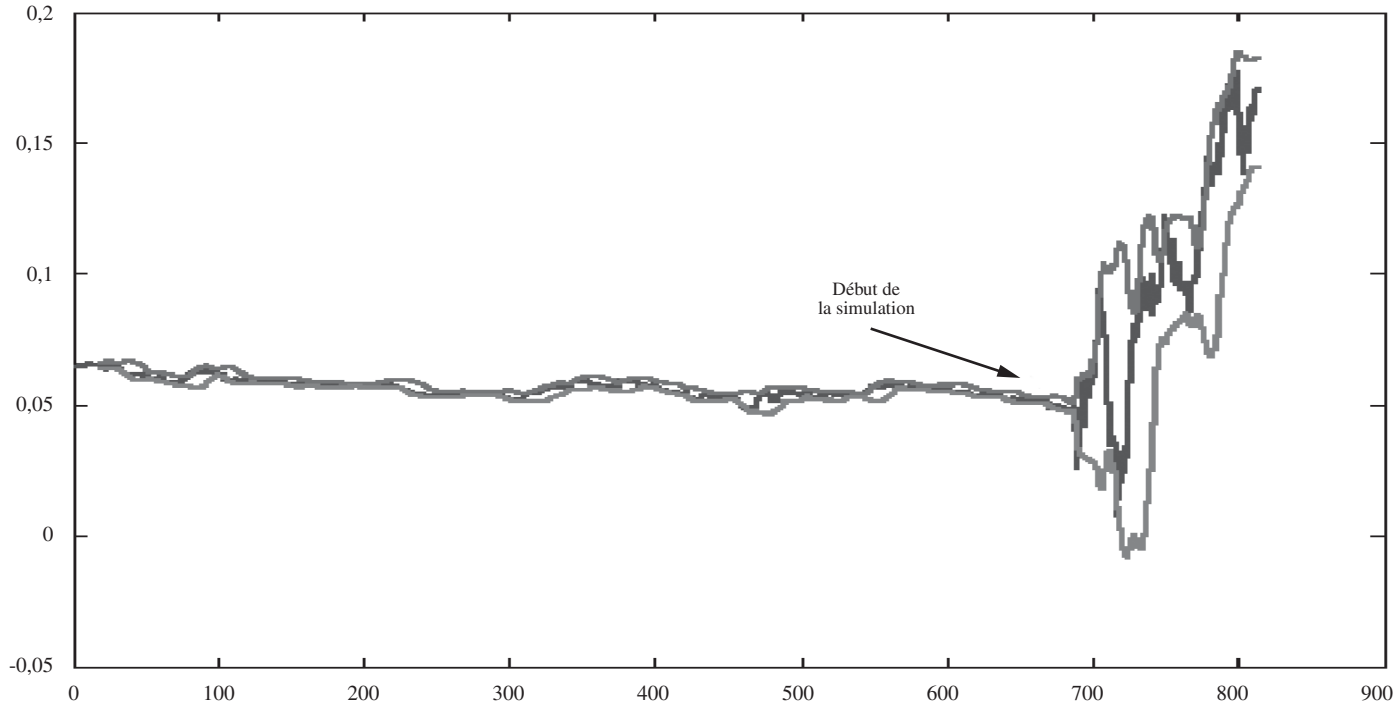
On constate sur le graphique 1, qui représente le résultat d'une trajectoire de cette simulation, que la variance de la simulation est très importante, à tel point qu'elle « écrase » complètement la série des taux observés.

Au graphique 2, la simulation s'effectue cette fois-ci en utilisant les bandes de Bollinger pour réduire la variance des données simulées. Quand le taux d'intérêt simulé frappe la bande supérieure ou inférieure, la trajectoire du taux d'intérêt s'inverse et il revient dans l'intervalle délimité par les bandes de Bollinger. Comme on peut s'en rendre compte en comparant les graphiques 1 et 2, notre technique de réduction de la variance améliore la simulation du taux d'intérêt des obligations fédérales. Après la mise sur pied de notre technique de réduction de la variance, le taux d'intérêt simulé fait montre d'un comportement habituel, les bandes de Bollinger arrivant à maîtriser ce comportement diffus observé au graphique 1.

13. Au début de chaque simulation, le taux d'intérêt initial est celui qui est observé le premier jour de la simulation. La variance v_0 est calculée à partir d'un processus GARCH(1,1), cela en procédant par récursivité sur les 400 jours précédant la date de départ de la simulation. Voir Rostan et Théoret (2002a, b).

GRAPHIQUE 1

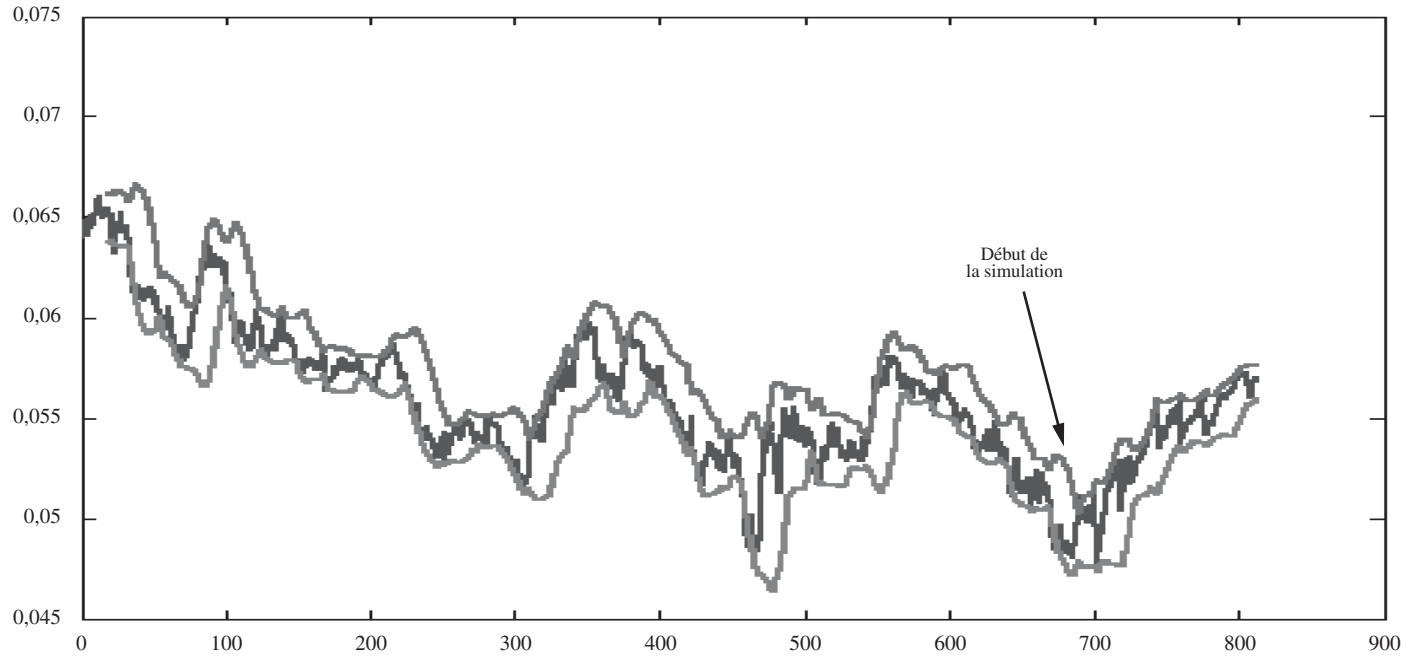
TAUX D'INTÉRÊT DES OBLIGATIONS FÉDÉRALES CANADIENNES À 10 ANS DU 4 JANVIER 2000 AU 26 SEPTEMBRE 2003



NOTE : Les 125 dernières observations ont été simulées par le modèle de Fong et Vasicek. Les courbes supérieure et inférieure sont les bandes de Bollinger. La courbe simulée se comporte de façon très désordonnée.

GRAPHIQUE 2

TAUX D'INTÉRÊT DES OBLIGATIONS FÉDÉRALES À 10 ANS DU 4 JANVIER 2000 AU 26 SEPTEMBRE 2003



NOTE : La dernière année qui inclut 125 observations a été simulée en utilisant le modèle de Fong et Vasicek et en recourant aux bandes de Bollinger comme technique de réduction de la variance. Les bornes supérieure et inférieure de la simulation sont ces bandes de Bollinger. Le profil des données simulées ne rompt pas avec celui des données observées comme c'est le cas au graphique 1.

2.2 Algorithme des bandes de Bollinger

Les bandes de Bollinger sont obtenues à partir de moyennes mobiles des données historiques. Notre moyenne mobile recouvre 100 observations passées (approximativement 5 mois). On calcule l'écart-type de la série de 100 jours que l'on multiplie par 2 pour obtenir les limites supérieure et inférieure de l'intervalle. Le premier jour de la simulation, on vérifie si le taux d'intérêt généré ($r + dr$) traverse la limite inférieure ou supérieure de l'intervalle. S'il défonce ces limites, on calcule la valeur opposée du nombre aléatoire de distribution normale standard utilisé pour calculer la valeur initiale de l'accroissement dr . Si le taux d'intérêt ne traverse pas les dites limites, on laisse dr tel quel. On roule une fenêtre de 100 données sur des périodes d'un jour, en répétant le même test et en appliquant la même procédure si la condition est vérifiée ou non vérifiée. En joignant les limites supérieure et inférieure, on obtient les bandes de Bollinger, supérieure et inférieure. Si l'on compare notre technique avec la panoplie des méthodes de réduction de la variance existantes, elle s'assimile à celle des variables antithétiques. Elle recourt aux bandes de Bollinger comme critère de création d'une variable antithétique plutôt que de la générer à chaque itération comme dans la méthode classique. Par conséquent, notre technique de construction de variables antithétiques est plus efficiente que la technique classique parce qu'elle dispose d'une mémoire intégrée. L'annexe A-2 de cet article présente un algorithme écrit dans le logiciel Matlab conçu pour mettre en œuvre notre technique dans le cadre du modèle de Fong et Vasicek (équations 1 et 2).

3. LES RÉSULTATS

Notre banque de données renferme les prix journaliers d'offre et de demande (*bid-ask prices*) des options OBK de la Bourse de Montréal. Ces données, disponibles sur Reuters, couvrent la période s'étirant du 24 juillet au 21 août 2002. L'option OBK est une option sur l'obligation à 10 ans émise par le gouvernement canadien. Notre échantillon contient 38 options OBK différant par la catégorie (option d'achat ou option de vente), l'échéance et le prix d'exercice.

Dans la section qui suit, nous évaluons ces options à l'aide du modèle de Fong et Vasicek puis nous calculons l'erreur quadratique moyenne (*MSE*) à partir des données observées et simulées, ce qui nous permettra d'évaluer notre technique de réduction de la variance¹⁴. Il nous faudra d'abord simuler le taux d'intérêt de l'obligation à 10 ans de même que sa variance durant la durée de vie de l'option à partir du modèle de Fong et Vasicek. Celui-ci nous sert par la suite à simuler le prix de l'obligation à 10 ans au cours de la même période, soit le *sous-jacent* d'une option OBK, à partir de la solution analytique du prix de l'obligation

14. Le *MSE* se calcule comme suit :
$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{(Bid_i + Ask_i)}{2} - \text{Prix calculé}_i \right)^2 \right], N \text{ étant le nombre d'observations.}$$

découlant de l'application des séries de Selby et de Strickland (1995)¹⁵. On peut alors évaluer, par simulation de Monte-Carlo, le prix de l'option OBK. Les détails de tous ces calculs sont colligés dans la section 2 de cet article, à l'annexe A-1 et dans les articles de Rostan et Théoret (2002a, b).

3.1 *Traçage des bandes de Bollinger*

Considérons une option particulière OBK observée le 26 juillet 2002, soit l'OBK@110 échéant en septembre. Nous simulons la trajectoire du taux d'intérêt des obligations à 10 ans sur une période de 56 jours, qui représente la durée restante de l'option. Pour ce faire, nous recourons à des bandes de Bollinger comportant une moyenne mobile (MM) de 100 jours. Cette trajectoire est illustrée au graphique 3.

La courbe retraçant l'historique du taux d'intérêt de l'obligation à 10 ans est représentée par les 100 dernières observations du graphique 2. Le traçage des bandes débute avec la moyenne mobile historique de 100 jours puis le taux d'intérêt est simulé sur une période de 56 jours, le tracé des bandes continuant de se conformer à la moyenne mobile des derniers 100 jours. On observe que la courbe des taux d'intérêt simulés est tronquée puisque le taux d'intérêt a frappé plusieurs fois les bandes inférieure et supérieure¹⁶.

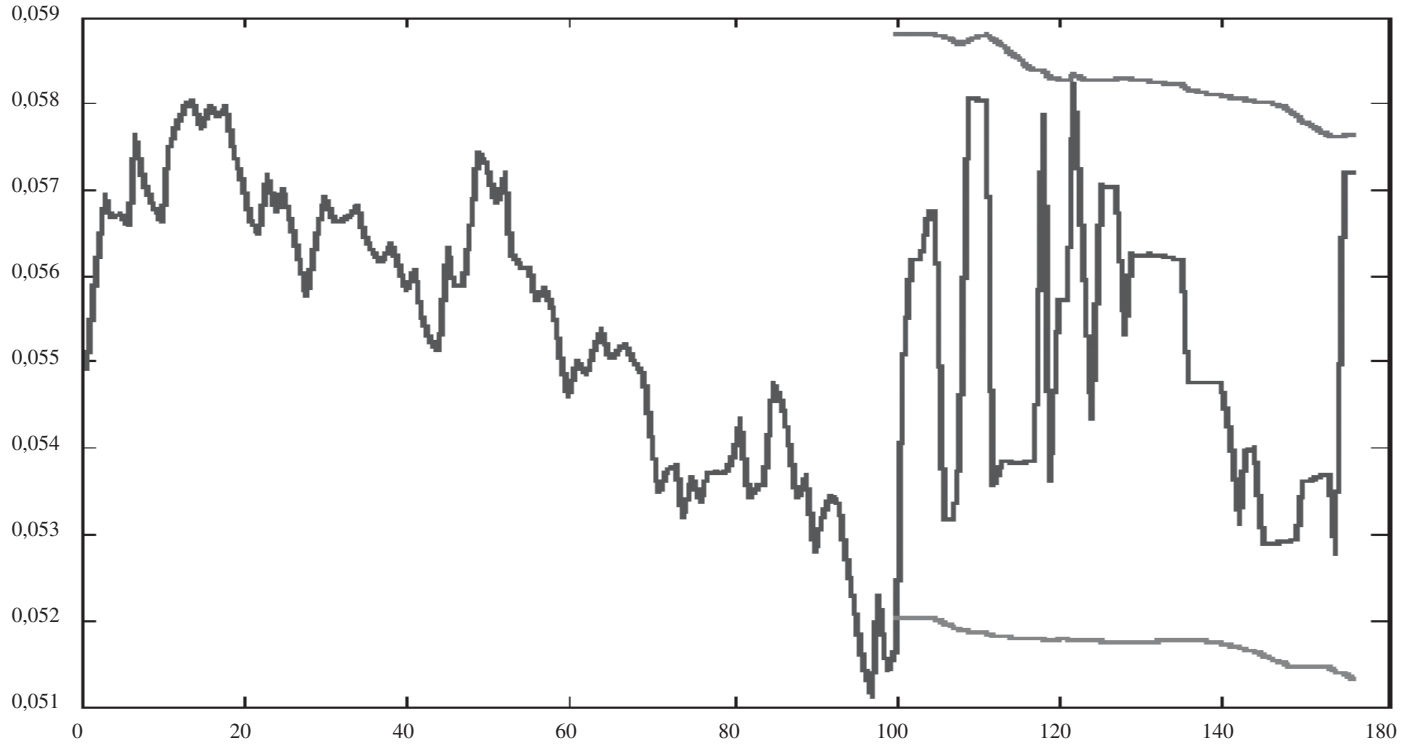
Le graphique 4 raccorde la trajectoire simulée à la série historique du taux d'intérêt des obligations à 10 ans. Il ne fait montre d'aucune brisure de comportement entre les séries historique et simulée. Le recours à une moyenne mobile trop courte présenterait le désavantage de donner lieu à une trajectoire plus tronquée, dotée d'une amplitude qui épouserait moins bien celle de la série historique. Une moyenne mobile définie sur 100 jours nous a semblé un bon compromis.

15. Les séries de Selby et Strickland présentent donc l'avantage d'éviter le calcul du prix de l'obligation jusqu'à son échéance comme c'est le cas dans le modèle de Black, Derman et Toy.

16. Notons que la simulation utilise 56 pas pour être en harmonie avec la période de 56 jours de la simulation, les bandes de Bollinger étant construites à partir de données journalières.

GRAPHIQUE 3

SIMULATION D'UNE TRAJECTOIRE (56 PAS) DU TAUX D'INTÉRÊT DE L'OBLIGATION À 10 ANS SUR UNE PÉRIODE DE 56 JOURS. $MM = 100$ JOURS.



GRAPHIQUE 4

RACCORD DE LA SIMULATION D'UNE TRAJECTOIRE (56 PAS) DU TAUX D'INTÉRÊT DE L'OBLIGATION FÉDÉRALE
À 10 ANS SUR 56 JOURS À LA SÉRIE HISTORIQUE. $MM = 100$ JOURS.



3.2 Évaluation des options OBK

En nous référant de nouveau à l'option particulière OBK@110 échéant en septembre 2002, nous avons calculé le prix de cette option en utilisant une moyenne mobile de 56 jours et une autre de 100 jours. Nous avons trouvé des prix respectifs de 15,24 \$ et de 16,43 \$. En recourant à l'approche traditionnelle de Fong et Vasicek sans bandes de Bollinger, le prix calculé, à hauteur de 19,21 \$, était sensiblement plus important. Le prix correspondant observé sur le marché était coté dans un intervalle¹⁷ compris entre 15,91 \$ et 16,91 \$ avec un prix milieu de 16,41 \$. Ces calculs prennent acte de la supériorité de l'approche par les bandes de Bollinger qui fait appel à une moyenne mobile assez longue, ici 100 jours.

Nous avons appliqué notre technique de réduction de la variance avec moyenne mobile de 100 jours à notre série de 38 OBK constituée d'options d'achat et de vente différant par leur échéance et leur prix d'exercice sur la période s'étirant du 24 juillet au 21 août 2002. Le graphique 5 compare les prix observés de ces options à leurs prix calculés avec le modèle de Fong et Vasicek renforcé par les bandes de Bollinger. Par ailleurs, le graphique 6 fournit les mêmes renseignements sans l'emploi des bandes de Bollinger. La simulation du prix de l'option sans les bandes de Bollinger fait appel à une variable de contrôle développée par Clewlow et Strickland (1997) qui semble préférable à la variable antithétique classique dans ce cas et qui fait appel à la couverture par le delta. Cette variable de contrôle prend la forme suivante :

$$cv^j = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial C_{it}}{\partial r} [\Delta r_{it} - E(\Delta r_{it})] e^{r(T-t_{i,i})} \quad (11)$$

avec j , l'indice de la trajectoire; r , le taux d'intérêt instantané et N , le nombre de pas de la trajectoire. Clewlow et Strickland ont constaté une réduction de la variance d'un facteur de 200 à la suite de l'incorporation de cette variable de contrôle dans leurs simulations.

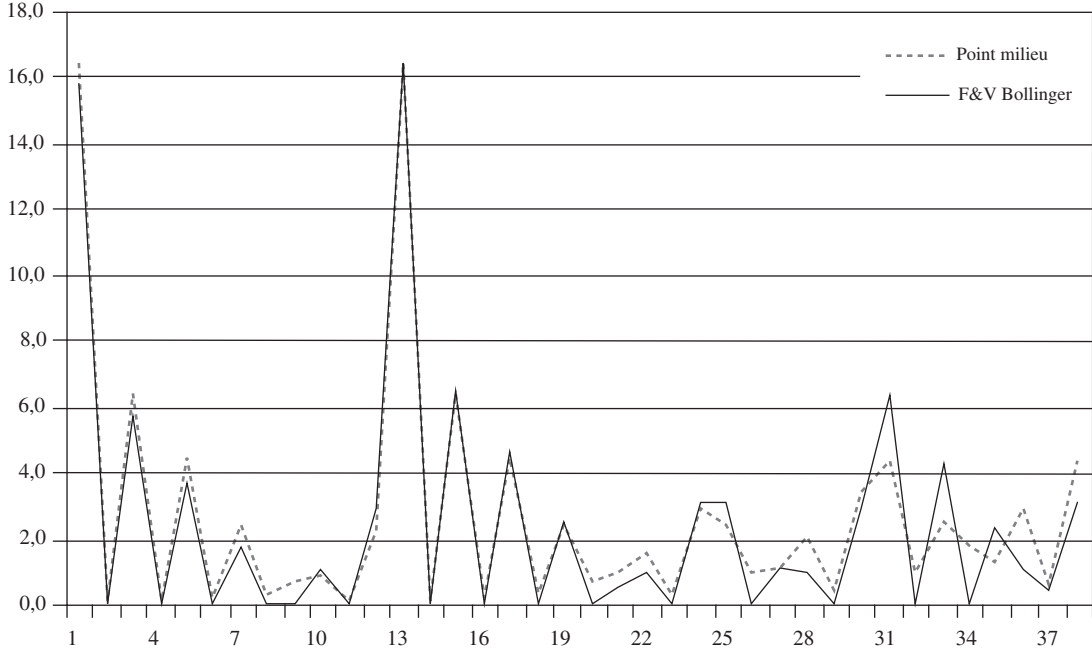
Sur le graphique 5, on prend acte de la supériorité de notre méthode de calcul. Les prix estimés sont très rapprochés des prix observés alors qu'ils s'en éloignent beaucoup sur le graphique 6 où l'on ne recourt pas aux bandes de Bollinger. L'erreur quadratique moyenne (MSE)¹⁸ de l'ensemble des simulations se situe à 0,65 lorsque l'on fait appel aux bandes de Bollinger et à 4,28 lorsque cette technique n'est pas utilisée. À l'évidence, la technique de réduction de la variance constituée par les bandes de Bollinger fait montre d'une excellente performance.

17. Soit l'intervalle *bid-ask*.

18. Il est à noter que nous utilisons l'erreur quadratique moyenne (MSE) pour juger la performance relative de nos simulations. À l'évidence, le MSE et sa racine carrée ($RMSE$) sont les statistiques les plus fréquemment utilisées pour évaluer la justesse de prévisions ou de simulations. Mais ces mesures ne vont pas sans défauts. Selon Alexander (2001), celles-ci ne font pas figure de critères de minimisation quand la volatilité est stochastique. Elles ne sont alors que de simples distances métriques. Notons que le MSE et le $RMSE$ peuvent également être corrigés de l'hétéroscédasticité. Finalement, on peut recourir à l'indicateur Mincer-Zarnowitz pour jauger la qualité d'une prévision. Pour plus de détails à ce sujet, voir Rostan et Théoret (2002b).

GRAPHIQUE 5

PRIX DES OPTIONS D'ACHAT OU DE VENTE OBK SUR L'OBLIGATION FÉDÉRALE CANADIENNE À 10 ANS

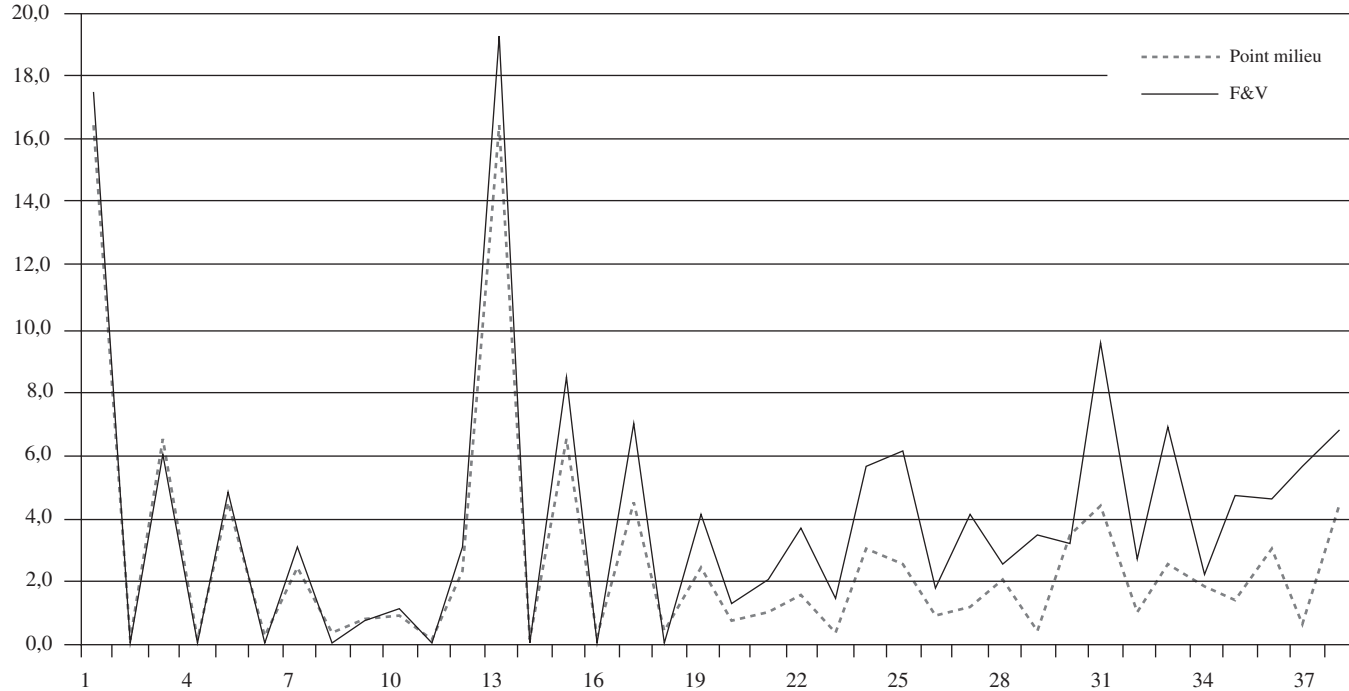


NOTE : Le milieu (*mid-point*) correspond au prix milieu des cotes *bid-ask*. « F&V boll. » sont les prix calculés avec le modèle de F&V renforcé par les bandes de Bollinger ($MM = 100$). Les prix estimés avec le modèle de F&V se confondent pratiquement avec ceux du marché sauf pour les options de décembre¹⁹. $MSE = 0,65$ pour 38 options. Ces prix sont à comparer à ceux du graphique 6.

19. Que les options de décembre puissent être difficiles à évaluer se comprend facilement. En décembre, il se produit beaucoup d'événements saisonniers sur les marchés financiers. Les entreprises s'emploient à maquiller leur bilan de fin d'année fiscale. Le taux du financement à 1 jour augmente des grâtons inhabituelles en raison des transactions saisonnières très importantes qui se produisent alors sur les marchés financiers. Ces événements, qu'on pourrait qualifier d'extrêmes, diminuent de beaucoup la performance des modèles d'évaluation de prix d'options. Les options qui échouent en décembre représentent également des options à plus long terme dans notre échantillon. Il se peut donc aussi que notre modèle éprouve des difficultés à déterminer les prix des options à plus long terme. Par conséquent, deux facteurs sont en cause au chapitre de la moins bonne performance de notre modèle s'agissant des options échéant en décembre. Par ailleurs, l'examen de nos résultats n'a pas révélé que les catégories d'options –, option d'achat ou option de vente, – influençaient les résultats.

GRAPHIQUE 6

PRIX DES OPTIONS D'ACHAT ET DE VENTE **OBK** SUR L'OBLIGATION FÉDÉRALE CANADIENNE À 10 ANS



NOTE : « F&V » sont les prix calculés avec le modèle de F&V sans bandes de Bollinger. Le modèle de F&V surestime presque systématiquement les prix des options.
 $MSE = 4,28$ pour 38 options.

Le tableau 2 enregistre les détails du calcul du *MSE* pour les 38 options OBK analysées. On remarque que les erreurs au carré résultant de l'utilisation du modèle de Fong et Vasicek sans bandes de Bollinger sont la plupart du temps fort élevées. Les erreurs quadratiques associées à l'utilisation du modèle avec bandes de Bollinger sont beaucoup plus faibles sauf pour les options échéant en décembre, comme nous l'avons expliqué antérieurement. Par ailleurs, la mesure Mincer-Zarnowitz²⁰ associée au modèle sans bandes de Bollinger est de 0,87 et de 0,96 pour le modèle avec bandes de Bollinger, ce qui prend acte de la supériorité de ce dernier. Les calculs basés sur des modèles de détermination des prix faisant appel à l'arbitrage devraient idéalement comporter un R^2 égal à l'unité.

TABLEAU 2

MSE ASSOCIÉS AUX ÉVALUATIONS DES PRIX DES OPTIONS
D'ACHAT OU DE VENTE OBK SELON LES DEUX MODÈLES

Point milieu	Prix F&V	Prix F&V Boll.	Erreurs au carré F&V	Erreurs au carré F&V Boll.
16,41	17,42	15,74	1,02	0,45
0,13	0,00	0,00	0,02	0,02
6,41	5,94	5,75	0,22	0,44
0,13	0,00	0,00	0,02	0,02
4,42	4,71	3,69	0,09	0,53
0,21	0,00	0,00	0,04	0,04
2,37	3,08	1,73	0,51	0,40
0,27	0,03	0,00	0,06	0,07
0,72	0,65	0,00	0,00	0,51
0,86	1,08	0,99	0,05	0,02
0,13	0,00	0,00	0,02	0,02
2,25	2,99	2,89	0,56	0,42
16,41	19,21	16,38	7,84	0,00
0,13	0,00	0,00	0,02	0,02
6,41	8,43	6,46	4,08	0,00
0,18	0,00	0,00	0,03	0,03

20. La mesure Mincer-Zarnowitz est tout simplement le R^2 de la régression des données simulées sur les données observées.

TABLEAU 2 (suite)

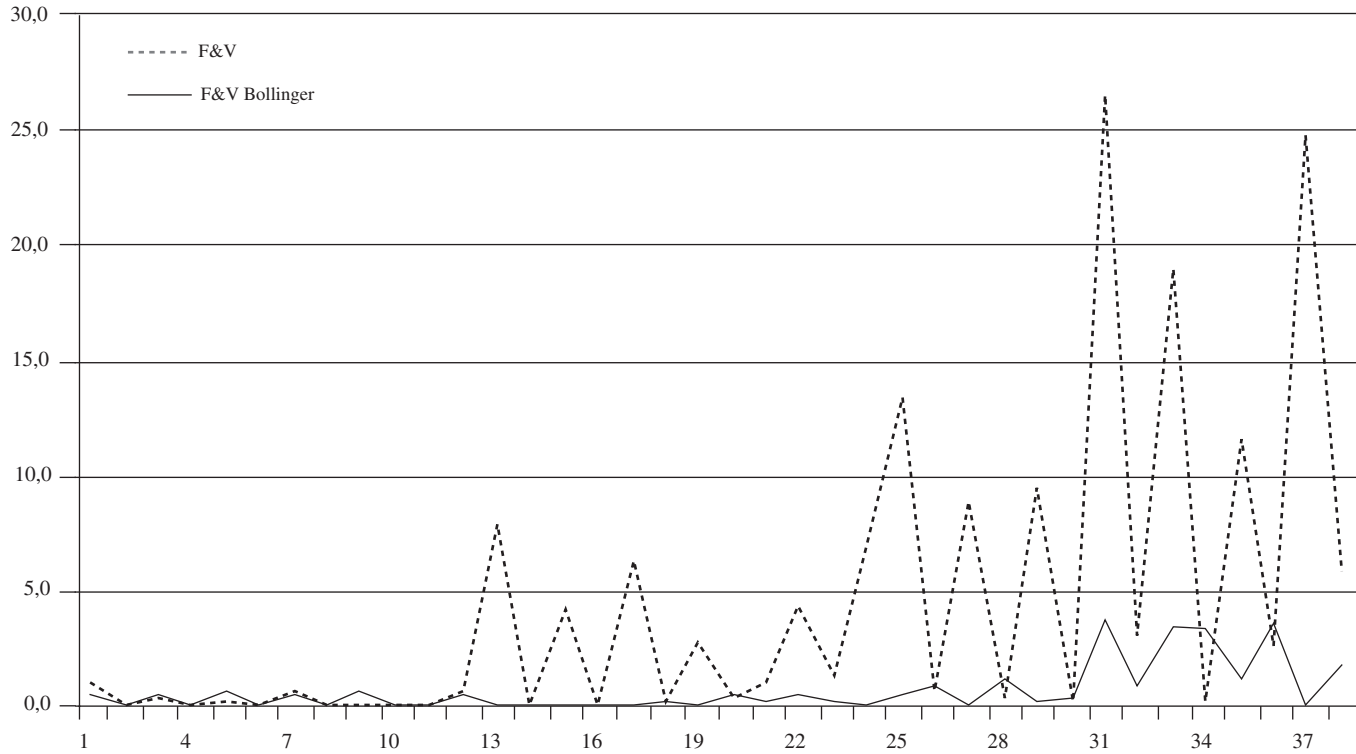
Point milieu	Prix F&V	Prix F&V Boll.	Erreurs au carré F&V	Erreurs au carré F&V Boll.
4,42	6,92	4,60	6,28	0,03
0,34	0,00	0,00	0,11	0,11
2,41	4,04	2,51	2,67	0,01
0,70	1,25	0,00	0,30	0,49
0,96	1,95	0,53	0,99	0,18
1,55	3,60	0,90	4,20	0,42
0,29	1,43	0,00	1,31	0,08
2,94	5,55	3,06	6,84	0,02
2,43	6,09	3,04	13,43	0,38
0,90	1,67	0,00	0,59	0,81
1,12	4,08	1,09	8,79	0,00
2,02	2,50	0,95	0,23	1,14
0,39	3,45	0,00	9,39	0,15
3,43	3,11	2,87	0,10	0,31
4,37	9,51	6,30	26,47	3,75
0,96	2,68	0,00	2,96	0,92
2,45	6,79	4,29	18,88	3,39
1,80	2,19	0,00	0,16	3,22
1,31	4,69	2,34	11,46	1,08
2,92	4,52	1,01	2,58	3,62
0,58	5,56	0,41	24,80	0,03
4,35	6,77	3,04	5,88	1,72
Total MSE			162,98	24,83
			4,29	0,65

NOTE : Les prix milieux sont la moyenne des prix *bid-ask*. Les prix F&V sont calculés à partir du modèle de F&V sans bandes des Bollinger. Les prix « F&V Boll » sont calculés avec ledit modèle renforcé par les bandes de Bollinger.

Finalement, le graphique 7, qui reproduit les erreurs quadratiques des 38 options associées aux deux méthodes d'évaluation, atteste de la très bonne performance de la technique des bandes de Bollinger.

GRAPHIQUE 7

ERREURS QUADRATIQUES DES ÉVALUATIONS DES 38 OPTIONS OBK ASSOCIÉES AU MODÈLE DE F&V AVEC ET SANS BANDES DE BOLLINGER



Dans le but de mieux consolider nos résultats, nous comparons le modèle de Fong et Vasicek renforcé par les bandes de Bollinger à l'un des modèles les plus utilisés par les praticiens, soit le modèle de Black, Derman et Toy (1990). Dans ce modèle, le taux d'intérêt obéit à l'équation différentielle suivante :

$$d \ln r(t) = \left[\theta(t) - \frac{v'(t)}{v(t)} \ln r(t) \right] dt + v(t) dz_t \quad (12)$$

avec

$\ln r(t)$: logarithme du taux d'intérêt;

$v = t$: volatilité du taux d'intérêt

et $v'(t) = \frac{dv}{dt}$.

À l'instar du modèle de Fong et Vasicek, le modèle de Black, Derman et Toy fait partie de la classe des modèles de retour vers la moyenne (Ornstein-Uhlenbeck) où le ratio $\frac{v'(t)}{v(t)}$ représente la vitesse du retour vers la moyenne. Le modèle de Black, Derman et Toy comporte deux fonctions du temps, $\theta(t)$ et $v(t)$, choisies de telle sorte que le modèle pastiche les profils de la structure à terme des taux d'intérêt au comptant et de la structure à terme de la volatilité de ces taux. Ce modèle recourt à l'arbre binomial pour évaluer les options sur taux d'intérêt ainsi que celles sur obligations. Il est à noter que la volatilité du taux d'intérêt ne dépend que du pas de l'arbre dans le modèle de Black, Derman et Toy et non également de l'état de la nature, comme c'est le cas dans le modèle de Fong et Vasicek²¹.

Lors de nos calculs, nous avons fait abstraction des options à plus long terme, soit celles échéant en décembre dans le cadre de cette étude, car elles présentent, comme nous l'avons mentionné antérieurement, des problèmes d'estimation particuliers. Le *MSE* associé au modèle de Fong et Vasicek additionné des bandes de Bollinger est égal à 0,38 alors que celui associé au modèle de Black, Derman et Toy se situe à 0,53. Encore une fois, le modèle de Fong et Vasicek renforcé par les bandes de Bollinger se révèle supérieur au modèle encore le plus utilisé dans la pratique financière pour évaluer les options sur taux d'intérêt et sur obligations, soit le modèle de Black, Derman et Toy.

21. Certes, nous ne pouvons incorporer des bandes de Bollinger dans le modèle de Black, Derman et Toy car la technique numérique que ces auteurs utilisent est l'arbre binomial.

CONCLUSION

Notre méthode axée sur les bandes de Bollinger peut être considérée comme une technique de réduction d'amplitude en ce sens qu'elle filtre les variations extrêmes d'une série temporelle simulée dans le cadre d'une simulation de Monte-Carlo. Elle filtre donc les données situées au-delà de deux écarts-types d'une moyenne mobile de 100 jours. En fait, il s'agit d'une technique de réduction de la variance basée sur le recours à une variable antithétique douée d'une mémoire intégrée. Nous avons montré dans cet article que nous pouvions réduire considérablement l'erreur quadratique moyenne en utilisant les bandes de Bollinger dans une simulation. Nos simulations s'appuient sur le modèle de Fong et Vasicek pour le taux d'intérêt de l'obligation *sous-jacente* à l'option dont on veut évaluer le prix. Ce modèle a donné de bien meilleurs résultats lorsqu'il est renforcé par les bandes de Bollinger et se compare avantageusement à un modèle populaire, dans la pratique financière, le modèle de Black, Derman et Toy. Notre technique peut être appliquée à d'autres séries simulées incluant, entre autres, des prix d'actions et des taux de change, et peut être testée en conséquence.

ANNEXE 1

DÉRIVATION DE L'ÉQUATION DU PRIX DE L'OBLIGATION DANS LE MODÈLE DE FONG ET VASICEK (ÉQUATION 4) À L'AIDE DES SÉRIES DE SELBY ET STRICKLAND (1995)

Dans cette annexe, nous voulons montrer comment calculer les fonctions $F(\tau)$ et $G(\tau)$ qui apparaissent dans l'équation du prix de l'obligation du modèle de Fong et Vasicek (équation 4) qui, on le rappelle, prend la forme suivante :

$$P(t, s, r, v) = e^{-rD(\tau)+vF(\tau)+G(\tau)} . \tag{13}$$

Selby et Strickland (1995) (S&S) ont proposé une méthode faisant appel à des séries pour calculer les fonctions $F(\tau)$ et $G(\tau)$. Nous la présentons ci-après. Comme nous serons à même de le constater, cette technique de calcul est complexe et nous avons dû la raffiner pour la rendre opérationnelle.

L'équation différentielle à laquelle satisfait F est une fonction Ricatti qui incorpore le carré de la fonction. Substituons l'équation suivante dans $F(\tau)$:

$$H(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 \int_t^s F(u) du\right) . \tag{14}$$

Celle-ci se réduit alors à une équation linéaire du second degré en termes de H . À la suite de cette substitution, on obtient :

$$F(\tau) = -\frac{2}{\xi^2} \frac{H'(\tau)}{H(\tau)} , \tag{15}$$

$$G(\tau) = \bar{r}(D(\tau) - \tau) - \frac{2\lambda \bar{v}}{\xi^2} \ln H(\tau) . \tag{16}$$

Par conséquent, le calcul du prix de l'obligation se réduit au calcul de $H(\tau)$ et $H'(\tau)$. Une substitution supplémentaire

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} \log x , \quad 0 \leq x \leq 1 , \tag{17}$$

$$H(\tau) = x^\beta Q(x) \tag{18}$$

avec $\beta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \frac{\xi^2}{\alpha} + 2\lambda \frac{\xi^2}{\alpha^3}}$

et $\beta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \frac{\xi^2}{\alpha} + 2\lambda \frac{\xi^2}{\alpha^3}}$

réduit l'équation de H à une équation linéaire différentielle homogène en Q

$$\begin{aligned}
 &xQ''(x) + \left((2\beta - \theta + 1) + \frac{\rho\xi}{\alpha^2}x \right) Q'(x) \\
 &+ \left(\frac{\xi\rho\beta}{\alpha^2} - \frac{\xi^2}{2\alpha^4}(1 - \alpha\lambda) + \frac{\xi^2}{4\alpha^4}x \right) Q(x) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Le point $x = 0$ est un point régulier singulier. S&S ont développé une solution du type Frobenius pour $Q(x)$ et l'ont substituée dans l'équation (16) pour H , ce qui leur a permis de calculer F et G à l'aide des équations (15) et (16), respectivement.

$$Q(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{20}$$

par conséquent,

$$Q'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+c) a_n x^{n+c-1} \tag{21}$$

et

$$Q''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1) a_n x^{n+c-2}. \tag{22}$$

Soit,

$$\bar{\alpha} = 2B - \theta + 1, \tag{23}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\rho\xi}{\alpha^2}, \tag{24}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\xi\rho\beta}{\alpha^2} - \frac{\xi^2}{2\alpha^4}(1 - \alpha\lambda), \tag{25}$$

$$\bar{\delta} = \frac{\xi^2}{4\alpha^4}. \tag{26}$$

En substituant les expressions de Q et de sa dérivée dans l'équation (19), S&S obtiennent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+c)(n+c-1 + \bar{\alpha}) a_n x^{n+c-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\beta}(n+c) + \bar{\gamma}) a_n x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta} a_n x^{n+c+1} = 0. \tag{27}$$

Les coefficients x^{c+n} , $n = -1, 0, 1, \dots$, doivent être identiquement nuls. Par conséquent,

$$x^{c-1} : c(\bar{\alpha} + c - 1) = 0 \quad \text{si } a_0 \neq 0. \tag{28}$$

C'est là l'équation dite « incidiale ». Par conséquent,

$$c = 0$$

ou

$$c = \bar{a}.$$

Quand \bar{a} n'est pas un nombre entier et que de plus il n'est pas égal à 1, nous obtenons directement deux solutions indépendantes. On a alors :

$$x^c : (1+c)(\bar{\alpha}+c)a_1 + (\bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_0 = 0. \tag{29}$$

Il s'ensuit

$$a_1 = \frac{-(\bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_0}{(1+c)(\bar{\alpha}+c)} \tag{30}$$

où a_0 est la valeur de départ (*seed value*). Égalisons les coefficients pour $n > 0$ à,

$$\begin{aligned} x^{c+1} : (2+c)(\bar{\alpha}+c+1)a_2 + (\bar{\beta} + \bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_1 + \bar{\delta}a_0 &= 0, \\ x^{c+2} : (3+c)(\bar{\alpha}+c+2)a_3 + (2\bar{\beta} + \bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_2 + \bar{\delta}a_1 &= 0, \\ x^{c+3} : (4+c)(\bar{\alpha}+c+3)a_4 + (3\bar{\beta} + \bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_3 + \bar{\delta}a_2 &= 0, \\ x^{c+n} : [(n+1)+c](\bar{\alpha}+c+3n)a_{n+1} + (\bar{\beta}n + \bar{\beta}c + \bar{\gamma})a_n + \bar{\delta}a_{n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

En réarrangeant les coefficients des puissances de x , et en définissant $\bar{\varepsilon} = \bar{\beta}c + \bar{\gamma}$ nous obtenons :

$$a_2 = \frac{(\bar{\beta} + \bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}(1+c)(\bar{\alpha}+c)}{(1+c)(2+c)(\bar{\alpha}+c)(\bar{\alpha}+c+1)}a_0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & \frac{-\bar{\varepsilon}(\bar{\beta} + \bar{\varepsilon})(2\bar{\beta} + \bar{\varepsilon})}{(1+c)(2+c)(3+c)(\bar{\alpha}+c)(\bar{\alpha}+c+1)(\bar{\alpha}+c+2)} \\ & - \frac{(2\bar{\beta} + \bar{\varepsilon})(1+c)(\bar{\alpha}+c)}{(1+c)(2+c)(3+c)(\bar{\alpha}+c)(\bar{\alpha}+c+1)(\bar{\alpha}+c+2)} \\ & + \frac{\bar{\varepsilon}(2+c)(\bar{\alpha}+c+1)\bar{\delta}}{(1+c)(2+c)(3+c)(\bar{\alpha}+c)(\bar{\alpha}+c+1)(\bar{\alpha}+c+2)}a_0. \end{aligned} \tag{33}$$

Pour des valeurs de $n > 3$, S&S ont obtenu la forme récursive suivante :

$$a_n = \frac{(\bar{\beta} + \bar{\varepsilon})\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}(1+c)(\bar{\alpha}+c)}{(1+c)(2+c)(\bar{\alpha}+c)(\bar{\alpha}+c+1)}a_0. \tag{34}$$

L'équation complète pour (20) correspondant aux deux solutions indépendantes $c = 0$ et $c = 1 - \bar{\alpha}$ est donnée par :

$$Q(x) = aQ(x, c = 0) + bQ(x, c = 1 - \bar{\alpha}) \quad (35)$$

où a et b sont des constantes. Notons que $Q(x, c = 0)$ signifie $Q(x)$ « évalué à $c = 0$ ». En substituant de nouveau dans l'expression (18) pour H , nous obtenons,

$$H(\tau) = e^{-\alpha\beta\tau} [aQ(e^{-\alpha\tau}, 0) + bQ(e^{-\alpha\tau}, 1 - \bar{\alpha})]. \quad (36)$$

En trouvant la dérivée de (36) par rapport à τ , on a :

$$H'(\tau) = -\alpha\beta H(\tau) - \alpha e^{-\alpha(\beta+1)\tau} \cdot [aQ'(e^{-\alpha\tau}, 0) + bQ'(e^{-\alpha\tau}, 1 - \bar{\alpha})]. \quad (37)$$

Nous avons maintenant tous les éléments requis pour calculer $F(\tau)$ et $G(\tau)$, une fois déterminées les valeurs des constantes a et b . Pour y arriver, nous devons solutionner pour les deux conditions correspondant aux deux bornes. S&S ont choisi de solutionner pour les deux conditions : $H(0) = 1$ et $H'(0) = 1$. Ils ont obtenu le résultat suivant :

$$b = \frac{Q'(1,0) + Q(1,0)\beta}{Q(1,1-\bar{\alpha})Q'(1,0) - Q(1,0)Q'(1,1-\bar{\alpha})}, \quad (38)$$

$$a = \frac{1 - Q(1,1-\bar{\alpha})b}{Q(1,0)}. \quad (39)$$

C'est là, la solution en séries de S&S. Sa mise en œuvre présente un problème car l'équation (20) renferme une série de termes « $a_n x^n$ » allant jusqu'à l'infini. En pratique, nous n'avons pas à aller au-delà des 50 premiers termes car les suivants sont négligeables²². La valeur de départ a_0 présente dans l'équation (30) peut prendre une valeur quelconque, en autant que, quelle que soit cette valeur, on obtienne le même $Q(x)$ dans l'équation (20). a_0 fut fixé à 1.

22. Nous remercions le professeur René Ferland du département de mathématiques de l'UQAM pour ses remarques et suggestions.

ANNEXE 2

ALGORITHME EN MATLAB UTILISANT LA TECHNIQUE DES BANDES DE BOLLINGER
 POUR RÉDUIRE L'AMPLITUDE D'UNE SÉRIE SIMULÉE DONNÉE,
 EN PRENANT EN COMPTE SA VOLATILITÉ PASSÉE

```

for ab=1 : steps
    % Correlated random numbers u and w.
    u = et(ab,1);
    w = et(ab,2);

    % Drawing the upper and lower Bollinger Bands from a Moving Average
    of 100 days.
    [Mid,Uppr,Lowr] = bollinger(yield,100,0,2);
    dv = gamma*(vmean-v)*dt*t + xi*v^0.5*w.*(dt*t)^0.5;
    v = v + dv;
    dr = alpha*(rmean - r)*dt*t + v^0.5*u.*(dt*t)^0.5;
    r = r + dr;

    % Testing the crossing of the upper and lower bands.
    % If a band is crossed, take the opposite random number -u to generate dr;
    if not keep the
    % initial dr.
    if r>Uppr(ab+99) | r<Lowr(ab+99)
    dr = alpha * (rmean - r) * dt*t + v^0.5 * -u. * (dt*t)^0.5;
    r = r + dr;
    end
    rate(ab + 100)=r;
end

```

BIBLIOGRAPHIE

- ACHELIS, S. B. (1995), *Technical Analysis From A To Z*, McGraw-Hill.
- ALEXANDER, C. (2001), *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*, Chichester, Wiley.
- AMIN, K. et A. MORTON (1994), « Implied Volatility Functions in Arbitrage-free Term Structure Models », *Journal of Financial Economics*, 35 : 141-180.
- ANDERSEN, L. et M. BROADIE (2001), « A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-dimensional American Option », Working Paper, Columbia University.
- BLACK, F. (1976), « The Pricing of Commodity Contracts », *Journal of Financial Economics*, 3 : 167-179.
- BLACK, F., E. DERMAN et W. TOY (1990), « A One-factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options », *Financial Analyst Journal*, janvier-février : 33-39.
- BOLLERSLEV, T. (1986), « Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity », *Journal of Econometrics*, 31 : 307-327.
- BOYLE, P. (1977), « Options: A Monte-Carlo Approach », *Journal of Financial Economics*, 4 : 323-338.
- BOYLE, P., M. BROADIE et P. GLASSERMAN (1997), « Monte-Carlo Methods for Security Pricing », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 : 1 267-1 321.
- BRENNAN, M. et E.S. SCHWARTZ (1982), « An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17 : 301-329.
- BROADIE, M. et P. GLASSERMAN (1996), « Estimating Security Price Derivatives Using Simulation », *Management Science*, 42 : 269-285.
- BROADIE, M. et P. GLASSERMAN (1997), « Pricing American Style Securities Using Simulation », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 : 1 323-1 352.
- BUHLER, W. *et al.* (1999), « An Empirical Comparison of Forward-rate and Spot-rate Models for Valuing Interest-rate Options », *Journal of Finance*, 54 : 269-305.
- CAMPBELL, J.Y., A.W. LO et A.C. MACKINLAY (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, New Jersey, Princeton University Press.
- CARVERHILL, A. et L. CLEWLOW (1994), « On the Simulation of Contingent Claims », *Journal of Derivatives*, hiver : 66-74.
- CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, Wiley.
- CLEWLOW, L. et C. STRICKLAND (1997), « Monte-Carlo Valuation of Interest Rate Derivatives under Stochastic Volatility », *The Journal of Fixed-Income*, décembre : 35-45.
- DIETRICH-CAMPBELL, B. et E. SCHWARTZ (1986), « Valuing Debt Options: Empirical Evidences », *Journal of Financial Economics*, 16 : 321-343.

- FLESAKER, B. (1993), « Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest-rate Contingent Claims Pricing », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28 : 483-495.
- FONG, H.G. et O.A. VASICEK (1992), « Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor ». Working Paper, Gifford Fong Associates.
- GUAY, A. et E. GHYSELS (1998), « Structural Change Tests for Simulated Method of Moments », Cirano, no 98s-19, 33 p.
- HEATH, D., R.A. JARROW et A. MORTON (1989), « Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates », *Review of Futures Markets*, 9 : 54-76.
- HEATH, D., R. JARROW et A. MORTON (1992), « Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation », *Econometrica*, 60 : 77-106.
- HO, T. S. Y. et S.B. LEE (1986), « Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims », *Journal of Finance*, 41 : 1 011-1 028.
- HULL, J. et A. WHITE (1990), « Valuing Derivative Securities using the Explicit Finite Differences Method », *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 25 : 87-100.
- JAMES, J. et N. WEBBER (2000), *Interest Rate Modelling*, Chichester, Wiley.
- JAMSHIDIAN, F. (1989), « An Exact Bond Option Formula », *Journal of Finance*, 44 : 205-209.
- JARROW, R. (1996), *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, Mc Graw Hill, chapitres 12 et 13.
- LONGSTAFF, F. et E. SCHWARTZ (2001), « Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach », *Review of Financial Studies*, 14 : 113-147.
- LONGSTAFF, F. et E. SCHWARTZ (1992), « Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model », *Journal of Finance*, 48 : 1 259-1 282.
- MCFADDEN, D. (1989), « A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models without Numerical Integration », *Econometrica*, 57 : 995-1 026.
- RACICOT, F.-É et R. THÉORET (2004), *Le calcul numérique en finance quantitative et empirique : ingénierie financière et Excel (Visual Basic)*, 2^e édition, Presses de l'Université du Québec.
- RACICOT, F.-É et R. THÉORET (2001), *Traité d'économétrie financière : modélisation financière*, Presses de l'Université du Québec.
- REBONATO, R. (1998), *Interest-rate Option Models*, 2^e édition, New York, John Wiley & Sons.
- ROSTAN, P. et R. THÉORET (2002a), « Testing Fong and Vasicek Model on Interest Rate Options: Empirical Findings Integrating the Method of Simulated Moments, the Monte-Carlo Simulation and the Lattice Method », Centre de Recherche en Gestion, document de travail 15 –2002, <http://www.uqam.ca/crg/papers>.

- ROSTAN, P. et R. THÉORET (2002b), « The Empirical Foundations of Interest Rate Option Models: The Case of Montreal Exchange », Centre de Recherche en Gestion, document de travail, 25-2002, <http://www.uqam.ca/crg/papers>.
- SELBY, M.J.P. et C. STRICKLAND (1995), « Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Pricing Formula », *Journal of Fixed Income*, septembre : 78-84.
- TILLEY, J.A. (1993), « Valuing American Options in a Path Simulation Model », *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 : 83-104.
- TREINEN, A. (1999), « Playing Volatility Better With Bollinger Bands », *Bloomberg Magazine*, décembre : 127-128.
- VASICEK, O. (1977), « An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, 5 : 177-188.